p.179 問題 §.1

問題 1. 偏導関数

(1) $\arcsin \frac{y}{x}$

$f(x,y) = \arcsin \frac{y}{x}$ とおいて、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y \cdot \frac{1}{x^2} \cancel{x}}{\sqrt{1-\left(\frac{y^2}{x^2}\right)} \cancel{x}}$$

$$= \frac{-y}{x\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$f = \arcsin(y \cdot t) \quad t = \frac{1}{x}$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{y}{\sqrt{1-(yt)^2}}$$

$(x^{-1})' = -x^{-2}$

- $\arcsin x$ の微分

$f(x) = \arcsin x$ とおいて、

$f(\sin x) = x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

$\downarrow \frac{d}{dx}$

$f'(\sin x) \cdot \cos x = 1$

$$f'(\sin x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$\sin x = t$ とおいて、

$$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\arcsin t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

問題3. 接平面

(1) $\dfrac{x-y}{x+y}$

$z = f(x) = \dfrac{x-y}{x+y}$ とおく。

$$f_x = \frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}$$

$$f_y = \frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2}$$

$$f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) = z - f(a,b)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2b}{(a+b)^2}(x-a) + \frac{-2a}{(a+b)^2}(y-b) = z - \frac{a-b}{a+b}$$

問題4. $f(x,y)$ が点 (a,b) の近くで偏微分可能で、
f_x, f_y とも (a,b) で連続なら（即ち C^1 級なら）、
$f(x,y)$ は (a,b) で連続であることを示せ。

$f(x,y)$ が 点(a,b) で 偏微分可能であることは.

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + \varphi_1(x-a) \\ &= f(a,b) + f_y(a,b)(y-b) + \varphi_2(y-b) \end{aligned}\right\} \text{——①}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi_1(x-a)}{x-a} = \lim_{y\to b}\frac{\varphi_2(y-b)}{y-b} = 0$$

と表せる。

次に、f_x, f_y とも 連続であることは、

$t = (x,y)$, $\alpha = (a,b)$ として

$$\lim_{t\to\alpha} f_x(t) = \alpha \ , \quad \lim_{t\to\alpha} f_y(t) = \alpha \text{ ——— ②}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \ ^{\exists}\delta > 0 \quad s.t. \quad 0 < \| t - \alpha \| < \delta \longrightarrow \begin{cases} |f_x(t) - \alpha| < \varepsilon \\ |f_y(t - \alpha| < \varepsilon \end{cases}$$

と表せる。

① 式の $t\to\alpha$ の極限をとると、

$$\lim_{t\to\alpha} f(t) = \lim_{t\to\alpha} f(\alpha) + \underbrace{\lim_{t\to\alpha} f_x(\alpha)}_{\text{②より}\ \alpha}\underbrace{(x-a)}_{\binom{x}{y}\to\binom{a}{b}\ \text{より}\ 0} + \underbrace{\varphi_1(x-a)}_{\text{①より}\ 0}$$

$$= \alpha$$

(①の 下の 式でも 同様。)

よって $f(t)$ は α で 連続である。