

解析 II レポート (第 2 回)

平成 25 年 5 月 31 日

※ 提出期限： 6 月 7 日 (金) 授業開始時に集める。

レポート作成上の注意は第 1 回レポートと同じ。

※問題

1. 以下のそれぞれの $f(x, y)$ について、以下の問に答えよ。

i. $f(x, y) = 0$ である等高線の概略を図示せよ。

できれば (次問以下の結果も踏まえて) 0 以外の等高線の概略も示せ。

ii. 2 階までの偏導関数 ($f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}(=f_{yx})$) を求めよ。

iii. 停留点、つまり連立方程式 $f_x = 0, f_y = 0$ となる点 (x, y) をすべて求めよ。

iv. それらの停留点は極大点・極小点・それ以外 (鞍点等) のいずれであるかを分類せよ。

各停留点は x, y 座標だけでなく、その点での関数値 $z = f(x, y)$ も併せて示すこと。

(a) $f(x, y) = x^2(2 - x^2) - y^2$

(b) $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$

(c) $f(x, y) = \frac{1 - y^2}{1 + x^2}$

(d) $f(x, y) = xe^{-(x^2+y^2)}$

2. 次の方程式で表される曲面を「楕円体」という。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a, b, c > 0)$$

注：以下では $z \geq 0$ の範囲で考えるのでよい。なお $a = b = c$ なら球である。

(a) 楕円体の高さ $z = r$ ($0 < r < c$) での等高線は楕円になることを示し、その方程式を示せ。

(b) 点 $P(p, q, r)$ を楕円体上の点とする。

点 P を接点とする楕円体の接平面の方程式は次のように表せることを示せ。

$$\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} + \frac{rz}{c^2} = 1$$

(c) z 軸上の点 $Q(0, 0, d)$ ($d > c$) を通る楕円体の接平面は、すべて同じ高さで楕円体に接することを示し、その高さ (= 接点の z 座標) を d で表せ。

各問において、必要に応じて手書きないしコンピュータ作成の図などを添付してよい (むしろ推奨する)。