5.2 重心系（質量中心系）

重心を多体系に対してきちんと定義する。

重心の位置ベクトル

$$\text{重心 } \boldsymbol{r}_c \equiv \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} \left(= \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{M} \quad \left(M = \sum_i m_i \right) \right)$$

質量の和

- 全運動量の変化を考える。

$$M \frac{d\boldsymbol{v}_c}{dt} = \sum_i \boldsymbol{F}_i \qquad (\boldsymbol{v}_c = \dot{\boldsymbol{r}}_c)$$

外力の和が0なら、

$$M \frac{d\boldsymbol{v}_c}{dt} = 0$$

重心が等速運動する。
それは全運動量が保存することと等価である。

- 各粒子を重心に対する相対運動で考える。

$$\underbrace{\boldsymbol{r}_{ic}}_{} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_c$$

i粒子の相対位置ベクトル

$$\sum_i m_i \boldsymbol{r}_{ic} = \sum_i m_i (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_c)$$

$$= \underbrace{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}_{M\boldsymbol{r}_c} - M\boldsymbol{r}_c = 0$$

（重心の定義より）

これを時間tで微分すると、

$$\sum_i m_i \boldsymbol{v}_{ic} = 0 \quad \text{———} (*)$$

重心に対する相対座標で各粒子の運動量の和をとると0。

・全運動量は次のように定義されていたので、変形すると、

$$\mathbb{P} = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i$$

$$= M \cdot \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i}{M}$$

$$= M \cdot \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i}{\sum_i m_i}$$

$$= M \boldsymbol{v}_c$$

$$= \mathbb{P}_c$$

(多体系の)
全運動量は、
重心の運動量に等しい。

・次に運動エネルギーを考える。

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i^2$$

同じく定義から、

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{v}_c + \boldsymbol{v}_{ic})^2$$

重心と相対座標系に分けて、

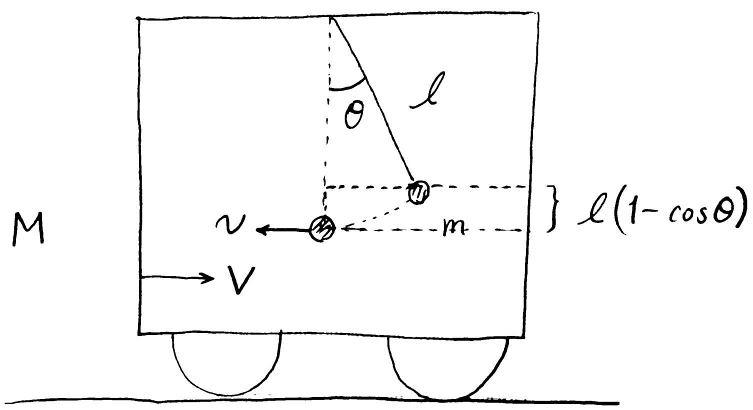
$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_c^2 + \underbrace{\boldsymbol{v}_c \sum_i m_i \boldsymbol{v}_{ic}}_{\text{上の}(*)\text{式より}0} + \sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_{ic}^2$$

$$= \frac{1}{2} M \boldsymbol{v}_c^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_{ic}^2$$

$$= T_C + T_{NC}$$

全運動エネルギーは、
(運動量とちがって)
重心の運動エネルギーと
重心に対する相対的な運動エネルギーの和。

問題 1.9



多体系の保存則を考える。
まさつはないので外力の和は0。

問1. 運動量保存より、

$$mv + MV = 0 \quad \text{—①}$$

エネルギー保存より、

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + 0 = 0 + mgl(1-\cos\theta) \quad \text{—②}$$

①、② より、

$$v = -\sqrt{\frac{2Mgl(1-\cos\theta)}{M+m}}, \quad V = \sqrt{\frac{2m^2gl(1-\cos\theta)}{M(M+m)}}$$

問2. 外力の和が0（水平方向）なので、
重心位置は変わらない。

最初の貨車の重心位置（水平方向）を原点にとる。

$$\frac{\overbrace{M\cdot 0}^{\text{貨車}} + \overbrace{ml\sin\theta}^{\text{球}}}{M+m} = \frac{Mx+mx}{M+m}$$

（貨車、球の位置ベクトル（の x 成分））

$$\therefore\ x = \frac{ml\sin\theta}{M+m} \quad （右方向）$$