レポート(階段行列とは何か)
について

○ 今まで主張してきたこと

定理　任意の行列は、$\boxed{\text{行の基本変形をくりかえすことで、}}$
簡約階段行列に変形できる。

これも階段行列と呼ぶ。
上の定理に例外をつけないために。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

上の定理を正しいとすれば、
これは簡約階段行列と呼ぶことになる。

左から基本行列をくりかえしかけることで

• 最も都合のよい場合

$$\underset{n\text{次正方行列}}{A} \rightsquigarrow \underset{\text{単位行列}}{E_n} \Rightarrow A\text{が正則行列}$$

基本変形をくりかえすと
単位行列になる

$\Longleftarrow$ 逆も真である

↓

証明方針は?

• A^{-1}が存在することを使って証明しよう。

$$BA = AB = E_n$$

検証する。進展している?
正則行列が単位行列にできたとして、
どういう情報が得られる?

定理を使ってほしい。

[(正則じゃなくても)任意の行列は
簡約階段行列になる。]

正則行列Aをまず、
簡約階段行列Tにしよう。
そしてTが単位行列ならよい。

↑

・その前に
Tは正則？

正則＝逆行列をもつ
正則行列Aに基本行列Q_nをかける。

$\underline{(Q_1 A)}(A^{-1}Q_1^{-1})$

基本行列は逆行列をもつから、
こういうふうに$(A^{-1}Q_1^{-1})$をかければEになるので$(A^{-1}Q_1^{-1})$は存在して$(A^{-1}Q_1^{-1})$

・ $\begin{pmatrix} & * & \\ \boxed{0 \;—\; 0} \end{pmatrix}$ これが正則じゃないのわかる？

↓

基本行列をかけて単位行列つくれる？

↓

何をかけても一番下の行は0

・ 一番下の行は0ではない。（初頭項をもつ）

⇕

すべての行は初頭項の数と同じ

⇕

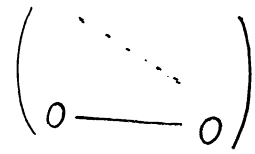
列全体の数と同じ

⇕

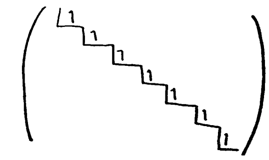
各列に1つずつ初頭項をもつ

・簡約階段行列 T によって 場合分け

Case 1



Case 2.



↓

初頭項が入っていない列があるものを考える

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 1 \end{pmatrix}$$

連立方程式で考える.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 0z = -\frac{3}{8} \\ 0x + 0y + 1z = \frac{1}{8} \end{cases}$$

yに何を入れても xは一意に決まる

これが初頭項があるときとないときのちがい?