らくがき

$$a_n = \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n^{\frac{1}{2}}} = \left(2^{-1}\right)^{n^{\frac{1}{2}}} = 2^{-n^{\frac{1}{2}}}$$

- $a_n > 0$ はいえる。

→ 正項級数

→ 単調増加 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{\sqrt{k}}}$ ← 上に有界であることを示す。

(↓ 収束する)

- a_n が単調減少は明らかといってよい。

$$\boxed{a_{n^2} > a_{n^2+1} > a_{n^2+2} > \cdots > a_{(n+1)^2-1}}$$

$(n+1)^2-1$ ↓ n^2+2n

$> a_{(n+1)^2}$

$(n+1)^2 - n^2 + 1$ 項

$(n+1)^2 - n^2$ 項

$= 2n+1$

$$\underbrace{\boxed{a_{n^2}} + a_{n^2+1} + \cdots + a_{(n+1)^2-1}}_{(2n+1)\text{項}} = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} a_k < (2n+1)\boxed{a_{n^2}}$$

一番大きい

$$= \frac{2n+1}{2^{\sqrt{n^2}}}$$

$$= \frac{2n+1}{2^n}$$

- $S_{n^2} = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{2^{\sqrt{k}}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{2n+1}{2^n}$??

$$^{\forall} m \in \mathbb{N}, \quad ^{\exists} n \in \mathbb{N}, \quad n^2 \leq m < (n+1)^2$$

$$S_{n^2} \leq S_m < S_{(n+1)^2}$$

nを正の整数とする。
関数fが点aを含む開区間Jにおいて、
n回微分可能であるとする。
このとき、Jの任意の点xに対して、
$0<\theta<1$の範囲のθが存在して、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

Jの点xを任意にとって固定する。

$x=a$のときは明らか？

$x \neq a$のときを考える。

$$A = \frac{n!}{(x-a)^n}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)$$ と定める。

Jを定義域とする関数$F(t)$を、

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{A}{n!}(x-t)^n \tag{1}$$

と定義する。

関数fはJにおいてn回微分可能だから(仮定から)、
関数$F(t)$はJにおいて微分可能である。?
(整式はC^{∞}級とわかっていることにするのか)

aとxはJの点だから、平均値の定理より、
あるθ $(0<\theta<1)$が存在して、

$$F(x) = F(a) + F'(a+\theta(x-a))(x-a)$$

が成り立つ。

ここで$F(x)$と$F(a)$を計算すると、

−0 ?

$$F(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

$$F(a) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k - \frac{A}{n!}(x-a)^n = 0$$

(Aを代入)

したがって、

$$F'(a+\theta(x-a)) = 0 \quad \text{——— ②}$$

である。

$F(t)$ の微分を計算しよう。

① の右辺を t で微分する。

$$\frac{d}{dt} f(x) = 0 .$$

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{A}{n!}(x-t)^n = -\frac{A}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k \right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k \right)$$

$$= f'(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(f^{(k+1)}(t)(x-t)^k - f^{(k)}(t) \cdot k(x-t)^{k-1} \right)$$

$$= f'(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}$$

$$= f'(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

$$= f'(t) + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} - f'(t)$$

$$= \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}$$

以上より、

$$F'(t) = -\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{A}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}$$

$$= \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\left(A - f^{(n)}(t) \right),$$

となる。

したがって、[tに $a+\theta(x-a)$ を代入して]

$$F'(a+\theta(x-a)) = \frac{(x-(a+\theta(x-a)))^{n-1}}{(n-1)!}\left(A-f^{(n)}(a+\theta(x-a))\right)$$

$$= \frac{(1-\theta)^{n-1}(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\left(A-f^{(n)}(a+\theta(x-a))\right)$$

$\theta \neq 1$, $x \neq a$ だから、②より、?

$$f^{(n)}(a+\theta(x-a)) = A \quad ?$$

である。Aの定義から、

$$f^{(n)}(a+\theta(x-a)) = \frac{n!}{(x-a)^n}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)$$

である.

関数$f(x)$は閉区間$[a,b]$において$(n-1)$回微分可能かつ、$(n-1)$次までの導関数は閉区間$[a,b]$において連続とする。さらに、$f^{(n-1)}(x)$が開区間(a,b)上で微分可能ならば、任意の自然数mに対して$a<c<b$なるcが存在して、

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!\,m}(b-a)^m(b-c)^{n-m}$$

$$\begin{cases} F(x) = f(b) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k \\ g(x) = (b-x)^m \end{cases}$$

という２つの関数を考える。