o ポテンシャルについて補足

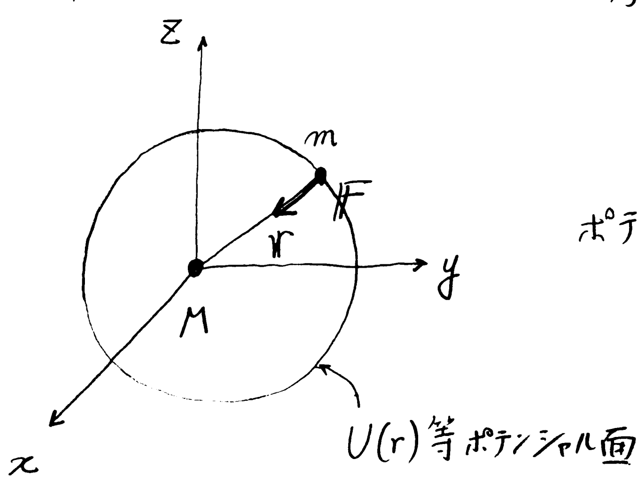
保存力を考えたときに

$$\mathbb{F} = -\nabla U = -\mathrm{grad}\, U$$ を導いたんだけど、

grad は等値面に垂直とやりました。
それを使うと…

Uの等値面(等ポテンシャル面)に垂直な方向を向き、
その方向の変化量。

具体的には…



万有引力

$$\mathbb{F} = -\frac{GMm}{r^2}\cdot\frac{\mathbb{r}}{r}$$

ポテンシャル

$$U(r) = -G\frac{Mm}{r}$$

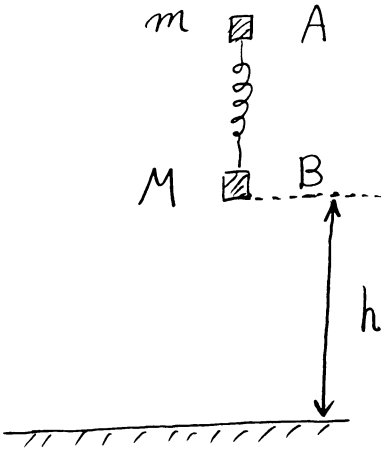
$$\mathbb{F} = -\nabla U(r)$$

$$= -\frac{d}{dr}\left(-G\frac{Mm}{r}\right)\cdot\frac{\mathbb{r}}{r}$$

$$= -G\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{\mathbb{r}}{r}$$

これが意味しているのは
等ポテンシャル面に対して垂直で
中心方向。
grad で等ポテンシャル面に対する垂直方向の量を
規定している?

前回の練習の答え合わせ
問題1.6



空気抵抗がないから、Mもmも同じ速度で落ちる。

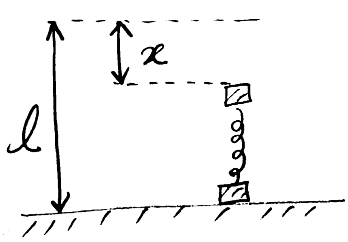
問1. このまま自然長で落下する。

エネルギー保存 $\frac{1}{2}mv^2 + U = $ 一定 にあてはめる。

$$0 + Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + 0$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

問2.



エネルギー保存より、

$$0 + mg(h+x) = 0 + \frac{1}{2}kx^2$$

Aの最下点を原点とした式

or

$$0 + mg(h+l) = mg(l-x) + \frac{1}{2}kx^2$$

床を原点とした式

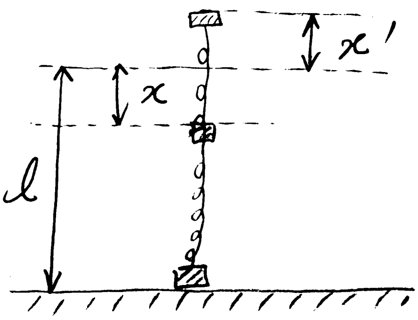
$$\therefore \quad kx^2 - 2mgx - 2mgh = 0$$

$$x = \frac{mg \pm \sqrt{(mg)^2 + 2mghk}}{k}$$

$x > 0$ なので、

$$x = \frac{mg + \sqrt{(mg)^2 + 2mghk}}{k}$$

問3, 問4.



エネルギー保存より、

$$0 + \frac{1}{2}mg(h - x') = 0 + \frac{1}{2}kx'^2$$

$$0 + mg(h + l) = mg(l + x') + \frac{1}{2}kx'^2$$ 床原点

$$\therefore kx'^2 + 2mgx' - 2mgh = 0$$

$$\therefore x' = \frac{-mg + \sqrt{(mg)^2 + 2mghk}}{k} \quad (\because x' > 0)$$

床から離れるためには、

$$kx' > Mg$$

$$\therefore -mg + \sqrt{(mg)^2 + 2mghk} > Mg$$

$$\therefore (mg)^2 + 2mghk > (M+m)^2 g^2$$

$$\therefore h > \frac{M^2 + 2Mm}{2mk}g$$

ポイントは、ずっとエネルギーが保存する過程だから、
最初と最後の状態を評価すればよい。

(Bは完全非弾性衝突で保存していないが、
Aは保存している。)

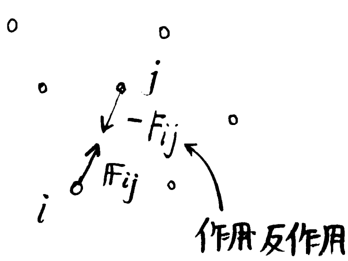
タタ体系でも保存則があります。

5章. タタ体系の保存則

5.1 運動量の保存

n個の質点　　質点同士に作用する力(内力) $\mathbb{F}_{ij}$

質点 i に作用する力(外力) $\mathbb{F}_i$



これで質点 i の運動方程式を考える。

$$m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \mathbb{F}_i + \sum_{j \neq i} \mathbb{F}_{ij} \quad \text{———} \ ①$$

そのときに、全運動量を考える。

①の式の n個の粒子の和をとる。

$$\sum_i m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \sum_i \mathbb{F}_i + \sum_i \sum_{j(\neq i)} \mathbb{F}_{ij} \quad \text{———} \ ②$$

作用・反作用によって、$\mathbb{F}_{ij} = -\mathbb{F}_{ji}$ なので、

$$\underbrace{\sum_i \sum_{j(\neq i)} \mathbb{F}_{ij}}_{\text{全ての } ij \text{ ペアの和}} = 0$$

逆向きのがうち消してしまうから。

よって、この②式は、

$$\sum_i m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \sum_i \mathbb{F}_i \quad \text{———} \ ③$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i v_i\right) = \sum_i F_i$$

運動量は
外力の和で
決まることがわかる

全運動量 P を次のように定義する。

$$P = \sum_i P_i = \sum_i m v_i$$

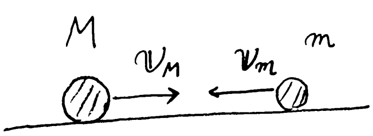
すると③式は、

$$\frac{dP}{dt} = \sum_i F_i$$

全運動量の時間変化は外力の和で決まるということを表す。
つまり、外力が0なら、

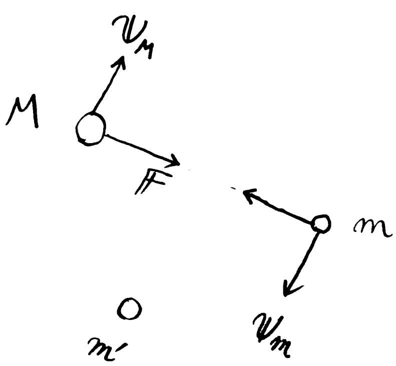
$$\frac{dP}{dt} = 0$$ 全運動量が保存する。

● 例

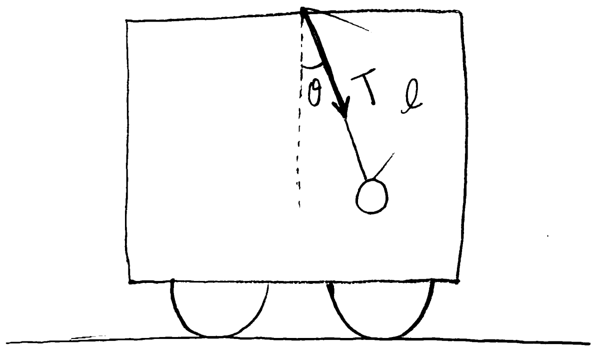


$$M v_M + m v_m = M v_M' + m v_m'$$

[完全弾性衝突じゃなくても運動量は保存するんだね。
エネルギーは保存しなくても]



問題 1.9 (今日は時間ない)



貨車とおもり全体で考えれば内力だけになるから、運動量の保存が使える。

次回は角運動量とエネルギーの保存