1.(a)

$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{n}$

のときの $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するかどうか判定し、

収束する場合は可能ならば和を求める。

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{n}$ の両辺の部分和をとる。

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}a_k + \frac{1}{k}\right)$$

$$S_{n+1} - a_1 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \qquad \left(S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ とおく。}\right)$$

$$(S_n + a_{n+1}) - 1 = \frac{1}{2}S_n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$S_n = 2\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - a_{n+1} + 1\right) \quad \text{———} \quad (*)$$

(1) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ について

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} &= 1 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k}\frac{1}{l} \\
&> 1 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k}\frac{1}{2^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\cdot\left(2^k - (2^{k-1}+1) + 1\right) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2} \\
&= 1 + \frac{1}{2}n
\end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > 1+\frac{1}{2}n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty \quad \text{なので}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \longrightarrow +\infty \quad \text{である。}$$

(2) S_n が単調増加であることを示すために、$a_n>0$ であることを示す。

$a_1 = 1 > 0$ である。

$a_n > 0$ と仮定すると、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + \frac{1}{n} \\ &> 0 + \frac{1}{n} > 0 \quad (n>0 \text{ より}) \end{aligned}$$

したがって $a_n > 0$ なので、S_n は狭義単調増加である。

(3) (＊) について評価する。

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$ は、(2) より単調増加なので、

収束するか $+\infty$ に発散するか、のどちらかである。

収束すると仮定すると、(1) より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = +\infty$ なので、

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-a_{n+1}\right) = -\infty$ となることが必要である。

しかし、数列が発散するならばその級数は発散するので矛盾。

したがって、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

1.(b)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n}$ が収束するかどうか判定し、

収束する場合はその和を求める。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$ を次の式と比較する。

$\log(1+x)$ のテイラー展開の x に $-x$ を代入すると、

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leq 1)$$ より、

$$\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (-x)^n \quad (-1 < -x \leq 1)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} x^n \quad (-1 \leq x < 1)$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\log(1-x)$$

よって $x = \frac{1}{2}$ のとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n} = -\log(1-x)$$

$$= -\log\frac{1}{2}$$

$$= -(\log 1 - \log 2)$$

$$= \log 2$$

以上より、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 2^n}$ は $\log 2$ に収束する。

1. (c)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$ が収束するかどうか判定し、

収束する場合は可能ならその和を求める。