解析 II レポート（第 1 回）解答補足

平成 25 年 5 月 23 日

第 1 回レポート問題 1(c) 解答への補足

1 (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{\sqrt{2}}} + \frac{1}{2^{\sqrt{3}}} + \frac{1}{2^2} + \cdots$

上記問題の前回配布した解答ではやや技巧的な解法を示したが、教科書 p.145 定理 4.1.15（積分による収束判定・評価）を用いるほうが自然だし簡単だろう。以下にそれを示す。

$f(x) = 2^{-\sqrt{x}}$ とおくと、自然数 n に対して

$$f(n) = 2^{-\sqrt{n}} = \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$$

だから、与えられた級数は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ と書ける。

$(x > 0)$ において、$f(x)$ は常に正（$f(x) > 0$）、単調減少、$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ であり、また下に凸である。

$f(x) > 0$、したがって与えられた級数が正項級数であることは明らか。単調減少であることも、任意の $a > 0$ に対し：

$$\frac{f(x+a)}{f(x)} = \frac{2^{\sqrt{x}}}{2^{\sqrt{x+a}}} = 2^{\sqrt{x}-\sqrt{x+a}} < 1$$

だから $f(x+a) < f(x)$ が成り立つ。$\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2^{-\sqrt{x}} = 0$ も明らかだろう。したがって定理 4.1.15 の前提条件が成り立つ。

なお「下に凸」は定理の適用には必要ないが、単調減少と合わせて、微分を用いて示しておこう。
合成微分の公式を使えば、$\sqrt{x} = t$ と置くことにより：

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (2^{-\sqrt{x}})' = \frac{d(2^{-\sqrt{x}})}{dx} = \frac{d(2^{-t})}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \\
&= -2^{-t}\log 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\log 2}{2} \cdot \frac{1}{2^{\sqrt{x}}\sqrt{x}} \\
f''(x) &= \frac{\log 2}{4} \cdot \frac{\sqrt{x}\log 2 + 1}{2^{\sqrt{x}} x^{\frac{3}{2}}} \quad \text{（計算略）}
\end{aligned}$$

$x > 0$ において $f'(x) < 0,\ f''(x) > 0$ だから $f(x)$ は（狭義）単調減少、下に凸である。

定理 4.1.15 の証明をなぞりながら記すと、$f(x)$ は単調減少だから自然数 k に対し

$$f(k+1) < \int_k^{k+1} f(x)dx < f(k)$$

$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ の総和をとると：

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) < \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx < \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

整理して：

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) < \int_1^{n+1} f(x)dx < \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

左２項は：

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) < f(1) + \int_1^{n} f(x)dx$$

と書き直せるから、$\sum f(k)$ についてまとめ直せば：

$$\int_1^{n+1} f(x)dx < \sum_{k=1}^{n} f(k) < f(1) + \int_1^{n} f(x)dx = \frac{1}{2} + \int_1^{n} f(x)dx$$

ここで $\underline{\int_1^{\infty} f(x)dx \text{ が存在すれば}}$、$n \to \infty$ として上式は：

$$\int_1^{\infty} f(x)dx < \sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \frac{1}{2} + \int_1^{\infty} f(x)dx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\clubsuit)$$

と書ける。

　そこで $f(x)$ の積分を考える。これは $\sqrt{x} = t$、すなわち $x = t^2$ とおくと $dx = 2tdt$ だから：

$$\int f(x)dx = \int 2^{-\sqrt{x}}dx = \int 2^{-t}(2t)dt$$

今度は $\displaystyle\int 2^{-t}dt = -\frac{2^{-t}}{\log 2}$ に注意して部分積分を行うと：

$$\int t \cdot 2^{-t}dt = -t \cdot \frac{2^{-t}}{\log 2} + \int \frac{2^{-t}}{\log 2}dt = -\frac{t \cdot 2^{-t}}{\log 2} - \frac{2^{-t}}{(\log 2)^2} = -2^{-t} \cdot \left(\frac{t}{\log 2} + \frac{1}{(\log 2)^2}\right)$$

すなわち：

$$\int f(x)dx = -2 \times 2^{-\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{\log 2} + \frac{1}{(\log 2)^2}\right)$$

これは $x \to \infty$ のとき 0 に収束するから（練習）、$\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ は存在し：

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} 2^{-\sqrt{x}}dx = \frac{1 + \log 2}{(\log 2)^2}$$

したがって $(\clubsuit)$ に代入して：

$$\frac{1 + \log 2}{(\log 2)^2} < \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \frac{1}{2} + \frac{1 + \log 2}{(\log 2)^2}$$

これは級数が上に有界であり、したがって収束することを示すとともに、和の値の範囲を示してもいる。$\log 2 = 0.693...$ だから、上に代入して：

$$3.5240.... < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{-\sqrt{n}}} < 4.0240...$$

<u>参考</u>： $f(x)$ は下に凸だから、積分の台形公式を使うと積分値に対しては過大評価になり、逆に積分値のほうは級数の和の過小評価になる。本問の場合、台形公式を使うと：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{-\sqrt{n}}} > \frac{1}{4} + \frac{1 + \log 2}{(\log 2)^2} = 3.7740...$$

となるが、これは正しい値 3.7882... の非常に良い近似値になっている。