先週、保存力の経路積分に負符号をつけて
ポテンシャルエネルギーを定義した。
今日はポテンシャルエネルギーを使って力を表す。
式を成分に展開する。

$$U(P) = -\int_A^P \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r} \quad \text{———} \quad (*)$$

(*)を成分に

$$U(P) = -\int_A^P (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

両辺を微分

$$dU = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (**)$$

右辺はUをx, y, z方向に変化させたときの変化量?

偏微分の定義から、dUは次のような形で書ける。

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \quad \text{———} \quad (***)$$

(**)と(***)を見比べると、

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

力の各成分はポテンシャルを偏微分したものをマイナスにしたもの

$$\therefore \mathbb{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\mathbb{e}_x - \frac{\partial U}{\partial y}\mathbb{e}_y - \frac{\partial U}{\partial z}\mathbb{e}_z$$

ベクトルで書く

$$= \underbrace{\left(-\frac{\partial}{\partial x}\mathbb{e}_x - \frac{\partial}{\partial y}\mathbb{e}_y - \frac{\partial}{\partial z}\mathbb{e}_z\right)}_{} U$$

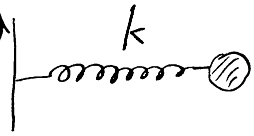
これは演算子と見ることができる(gradの負符号)

$$= -\nabla U \quad (= -\mathrm{grad}\, U)$$

ポテンシャルの基準点Aはどこでもいいが、
通常は $U(A)=0$ になる点をえらぶ。

- 例を考える。
- ばね定数 k のばね. $F=-kx$

例1



$$U(x)-U(A) = -\int_A^x (-kx)\,dx$$
$$= \int_A^x kx\,dx$$
$$= \frac{1}{2}kx^2 - \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_A$$

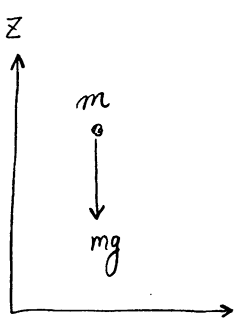
A点を $x=0$ となるように選ぶと、

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

と、おなじみのばねのエネルギーがでてくる

例2

- 一定重力 $F=-mg$

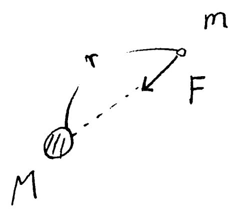


$$U(z)-U(A) = -\int_A^z (-mg)\,dz$$
$$= \int_A^z mg\,dz$$
$$= mgz - \left[mgz\right]_A$$

A点を $z=0$ となるようにえらぶと

$$U(z) = mgz$$

○ 例3　万有引力　$F = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$



$$U(r) - U(A) = -\int_A^r \left(-G\frac{Mm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot d\boldsymbol{r}\right)$$

同じベクトルの内積

$$= \int_A^r G\frac{Mm}{r^2}\,dr$$

$$= -G\frac{Mm}{r} - \left[-G\frac{Mm}{r}\right]_A$$

この形でポテンシャルが0になるところは、

A点を $r \to \infty$

$$U(r) = -G\frac{Mm}{r}$$

4.5 次に、力学的エネルギーの保存を示す。

以前、次の式を導いた。

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{t_2} - \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{t_1} = \int_P^Q \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}$$

$$= U(P) - U(Q)$$

ポテンシャルの定義に従うと、

変形して、

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{t_2} + U(Q) = \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{t_1} + U(P)$$

今、 $P: t_1$, $Q: t_2$ と対応している。
つまり、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和は保存する。

$$\left(\therefore \frac{1}{2}mv^2 + U = \text{一定} \right)$$

o また例を考える。

o 例1 ばね

$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ だったので、

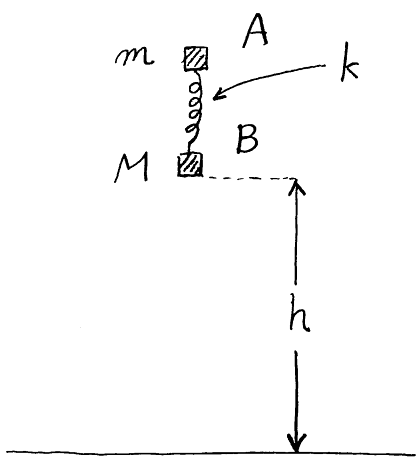
$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 =$ 一定 となる。

o 例2 一定重力 $U(z) = mgz$ だったので

$\frac{1}{2}mv^2 + mgz =$ 一定

o 例3 万有引力 $\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} =$ 一定.

関連した問題を解く
問題1.6



おもりBが床からはなれるための条件を考える。