2章

2.1 基本行列

何か行列が与えられたときに、目的に依るけど、
この m 行 n 列の並び方に価値があるならいじっちゃだめ。
でも連立方程式ならいじってもよい(方程式を解くときだって式をいじる)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{基本変形をくりかえして}} \begin{pmatrix} \text{かんたんな} \\ \text{行列にしたい} \end{pmatrix}$$

行列が与えられたとき

$\boxed{\text{必要なものを失わずに}}$
変形して

元に戻せる

- 基本変形をくり返せば可能ということを示す。
- 目標を決めないといけない

例えば

$$\begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_m \end{pmatrix}$$

になれば良いけど、
流石にムリ

(どんな行列が来ても
帰着できないと)

$$\begin{pmatrix} t_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & t_m \end{pmatrix}$$

なんでもいい

こうするために何したらいいか
考えよう。

どういう形になればOKか
目標を決めよう。

例えば

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ だと、

(2,1) 成分を 0 にすることが目標で

$\xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

どんな 2×2 行列でも $E_{ij}(c)$ で (2,1) 成分を 0 にできる？

↳ (1,1) 成分が 0 で、(2,1) 成分が 0 でない場合は不可能

↳ 第1行と第2行を入れかえる。

一般論

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ 0 & a_{22} & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

ここを 0 になるマニュアルを書け。

$a_{21} = 0$ ならば 何もしない。

$a_{21} \neq 0$ ならば、以下に続く。

$a_{11} \neq 0$ ならば $E_{21}\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$

$a_{11} = 0$ ならば P_{21}

（これがなくても $a_{21} = 0$ のとき E_{21} は 0 倍になるが。）

$E_{21}\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$: 2行に、1行の $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ 倍を足す。

P_{21} : 2行と 1行を入れかえる

操作をくりかえせる

2行目をかえずに 3行目の 1列目を 0 にできる。

1列目は (1,1) 以外全部 0 にできる。

次の目標は？

2列目（まず(2,3)成分）を 0にできるか？

1行目を除くと、1列目はすべて0.

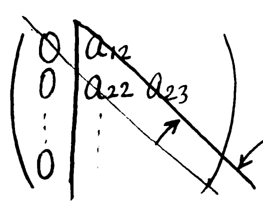
→ 行の基本変形 3つとも 1列目を変化させない。

1列目と1行目を除くと、行列のサイズが小さくなっただけで、

1列目をすべて0にできる。帰納法だ.

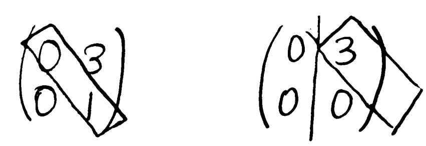
こんな状態まで行った。

ただし、もし



こっちで切った方がずっと0が多くなるでしょう？

こういう行列は1列目は忘れてしまおう



これも下三角と見えるけど → この方がかんたん

⓪ 行列が与えられる

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

① 1列目がすべて0のとき、
$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{\begin{matrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$m \times (n-1)$ 行列をとり出して、

再帰する。

② 1列目のどれかが0でないとき、

基本変形を使って、

$$\begin{pmatrix} b_{11}(\neq 0) & b_{12} \cdots b_{1n} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \\ b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{matrix}} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$ の形にして、

$(m-1) \times (n-1)$ 行列をとり出して、

再帰する。

アルゴリズムだ

来週までのレポート

以上のアルゴリズムを動かして、
最後にどうなったら完了と言えるか？

ある行の成分を左から順番に見て、
0のみが続く数を数える。
0のみが続く数が上の行より下の行が大きくなる場合、
その行列は階段行列である。

- 今日の中で、基本変形2つしか使っていません。3つあるのに。
ある行をc倍する、ってやつ。
それを使うともっとかんたんな行列にできる。

↓

左から見てはじめて0じゃない数を1にすると、
簡約階段行列というらしい。