第5章：多変数関数の微分法

- 概要
  - 本章では多変数関数（といっても実際には主に２変数関数）の微分について学ぶ。
  - 計算については、中心となるのは **偏微分・偏導関数** の計算である。
    これはすでに知っている1変数関数の微分（常微分）と実質的には同じである。
  - 一方、**微分（全微分）** の概念は、多変数関数になって初めてその実態が見えてくる。しかし残念ながら、教科書ではこれについては表立った記述はないので、授業で触れるにとどめる。

２変数関数

- $z = f(x, y)$　　主変数 x, y、従変数 z
  - もちろん必要に応じて他の記号でもよい
    $$y = f(x_1, x_2), \quad u = g(x, t), \quad \cdots$$
  - 点 (x, y) とベクトル $\boldsymbol{x}$ とを同一視して、
    $z = f(\boldsymbol{x})$　などとも書く
- ３変数関数:　$w = f(x, y, z)$
- n 変数関数:　$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
  - 微積分などの基本的性質については、２変数の場合と共通する点が多い

２変数関数（２）

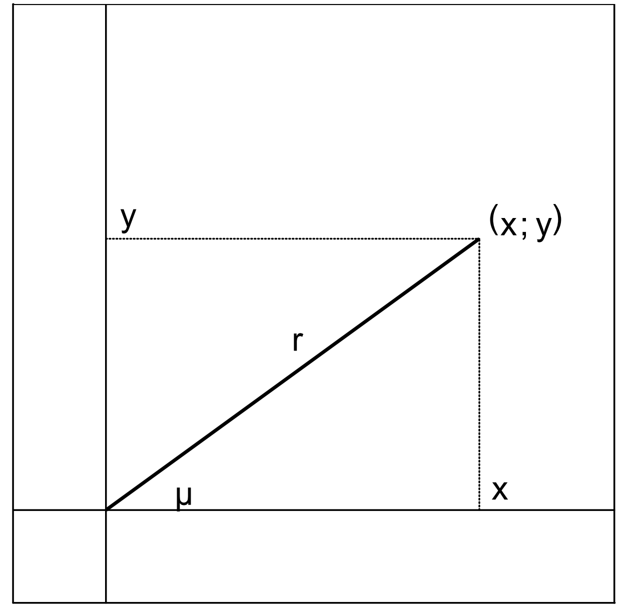
- $(x, y) \to z$ という対応が一意に決まれば、どんなものでも関数
- ただし、授業で対象とするのはもっと限定された、「おとなしい」関数
  - 比較的簡単な数式で表せる
  - 連続、あるいは例外的な点を除いて連続
  - 微分可能（偏微分可能、全微分可能）
- 定数関数や、一方の変数だけに依存する関数も2変数関数に含める

例： $f(x, y) = c, \quad f(x, y) = x, \quad f(x, y) = y^2$

極座標について

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$



- 極座標に直したほうが扱いやすい関数は多い。
  - 例: x^2+y^2 を含む関数、
    x, y の同次数の分数式
- 極座標、直交座標の相互変換に習熟しておくことが重要

距離・点列・連続関数 (5.1.1~3)

- ２点間の距離　$\boldsymbol{x}=(x,y), \boldsymbol{a}=(a,b)$ に対し、

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

- 点列の極限:　$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{a}$
  - 成分ごとの収束と同値:

$$\boldsymbol{a}_n=(a_n,b_n), \boldsymbol{a}=(a,b) \text{ なら } \lim a_n=a, \lim b_n=b$$

- 関数の極限:　$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})=\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=c$

注:一般には　$\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)\neq\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right)$

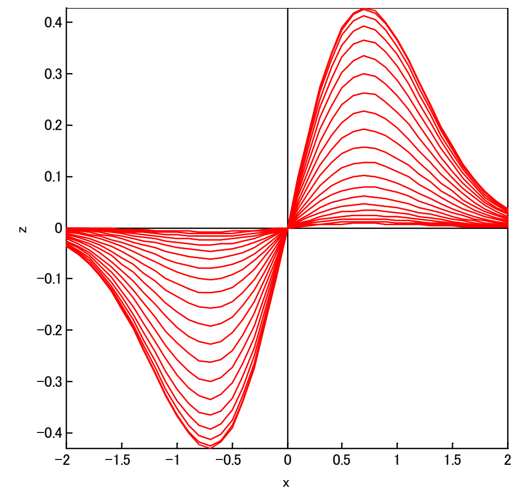
関数の極限、連続関数（２）

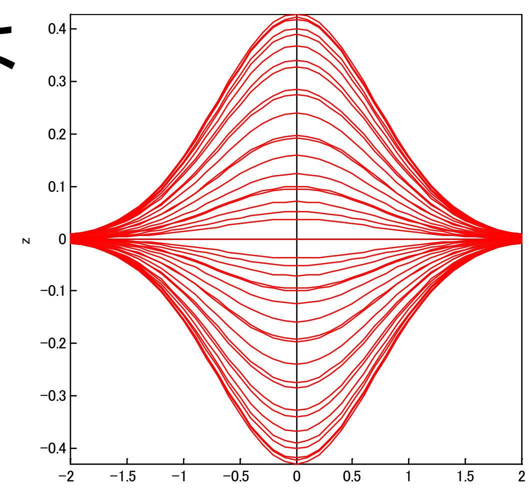
- $f(x,y) \to c$ $(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a})$ は、$\boldsymbol{x}$ がどのような方向から a に近づいても、$f(x, y)$ が c に収束するということ。
- １つの判定方法（$(x,y) \to (0,0)$ のとき）
  - 極座標 (r, θ) で表して $r \to 0$ としたとき、θの値に関わりなく一定値に収束する。
  - 例： $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ （収束しない）

    $f(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ （0に収束する）

関数の「断面」（教科書記載なし）

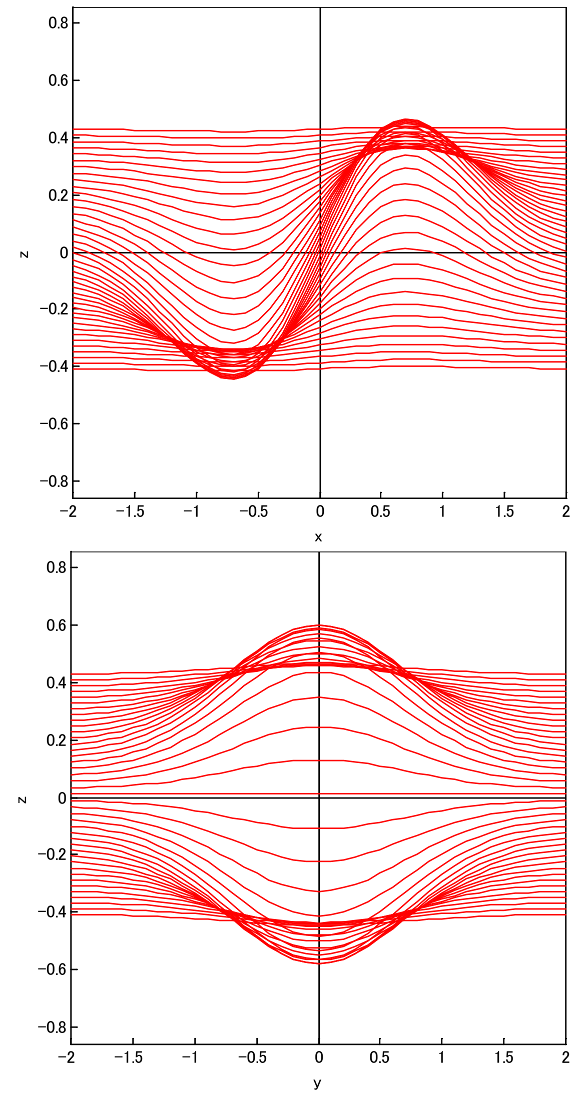
- $z=f(x,y)$ で一方の変数の値を固定すれば、もう一方の変数の１変数関数と見なせる。
- $x=a$ とした場合の $z=f(a, y)$ をf の$x=a$ による断面、$y=b$ とした場合の $z=f(x, b)$ をf の$y=b$ による断面と呼ぶ。
- （右図は $z = xe^{-(x^2+y^2)}$の断面を重ねたもの）





関数の「断面」(2)

- 関数の断面は、1方向に限定することにより、2変数関数の性質を考える手段となる
- 断面の表示をずらせば立体感も生じる(右図)
- 断面を(1変数関数として)微分したのが偏導関数



偏微係数・偏導関数

- 定義：点 (a, b) での x, y 方向への偏微係数

$$f_x(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

$$f_y(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$

- 上の (a,b) を (x,y) に書き換え、変数と見なしたものが偏導関数
- 書き方： $\frac{\partial f}{\partial x}, f_x, \frac{\partial z}{\partial x}, z_x, D_x f, D_1 f \quad \frac{\partial f}{\partial y}, f_y, \frac{\partial z}{\partial y}, z_y, D_y f, D_2 f$

- これまでの１変数の微分を「常微分」という

偏導関数の計算（１）

- $f(x,y)$ が x, y の数式で与えられている場合例えば x による偏微分は、y を定数と見なして普通の（１変数の）微分計算を行えばよい（定数と見なすのは計算の途中だけ: 得られた偏導関数では再び変数となる）
- 例 $z = xy^2 + x^3 y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = y^2 + 3x^2 y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = 2xy + x^3$$

偏導関数の計算（２）

- $f(x,y)$ が区分的に定義されている場合などは、定義に戻って計算する
- 例１　$f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\ ((x,y)\neq(0,0)),\quad f(0,0)=0$

  この例では$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ だが ....
  f (x,y) は原点で連続でさえない！
- 例２　$f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ ((x,y)\neq(0,0)),\quad f(0,0)=0$

  今度は$f_x(0,0), f_y(0,0)$ のどちらも存在しない！

<u>偏導関数についての注意</u>

- 前スライドの例にも見られるように:
  - $f_x(x,y)$ が存在しても $f_y(x,y)$ が存在するとは限らない
  - $f_y(x,y)$ が存在しても $f_x(x,y)$ が存在するとは限らない
  - $f_y(x,y)$, $f_x(x,y)$ の両方が存在しても、$f(x,y)$ は連続とは限らない、また他の方向に偏微分できるとはかぎらない
- つまり偏微分というのは特定の方向にしか見ていないから、関数のトータルな性質をとらえるには不十分である。

  ⇒ <u>（全）微分可能性</u> （(5.1.5) の C^1級）

偏導関数の計算（３）：特殊な例

$$f(x,y)=g(x)+h(y) \quad \Rightarrow \quad f_x=g'(x),\ f_y=h'(y)$$

$$f(x,y)=g(x)h(y) \quad \Rightarrow \quad f_x=g'(x)h(y),\ f_y=g(x)h'(y)$$

$$f(x,y)=g(x+y) \quad \Rightarrow \quad f_x=f_y=g'(x+y)$$

一般に：$f(x,y)=g(h(x,y))$

$$\Rightarrow \quad f_x=h_x(x,y)g'(h(x,y))$$ （合成微分 (5.1.7)）

$$f_x=h_y(x,y)g'(h(x,y))$$

$f(x,y)=f(y,x)$ （対称関数）の場合

$$f_x(x,y)=f_y(y,x)$$

$f_x(x,y)\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad f(x,y)$ は y だけの関数

$f_y(x,y)\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad f(x,y)$ は x だけの関数

（全）微分可能性（教科書記載なし）

- 偏微分可能なだけでは、２変数関数として「滑らか」である保証はない。
- １変数関数の場合（微分可能性）

$$f(x+\Delta x) = f(x) + A\Delta x + \varepsilon\Delta x \quad \varepsilon \to 0(\Delta x \to 0)$$

$$\Rightarrow \quad A = f'(x)$$

- ２変数関数の場合（（全）微分可能性）

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon\rho$$

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \qquad \varepsilon \to 0\ (\rho \to 0)$$

$$\Rightarrow \quad A = f_x(x,y), B = f_y(x,y)$$

（全）微分可能性（２）

- １変数の場合は割算（微分商）で済んだのが、多変数では割算ではうまくいかない。（ベクトル同士の割算ができないのと同じ）
- 「微分」、「微分形式」:
前式の$\Delta x, \Delta y,$ を dx, dy で置き換えて

$$df = dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

- 局所的には1次式で表せる、というのが本質
- そのまま接平面の方程式 (5.1.15) と見なせる。裏返せば、接平面が存在⇔微分可能
- C^1 級であることは微分可能な十分条件

（全）微分可能性（３）

- C^n 級関数（n=0,1,2,...)
  - n 階微分可能で、偏導関数がすべて連続
  - C^0 級： $f(x,y)$ は連続関数
  - C^1 級： $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ が存在して連続
  - ....
  - C^∞ 級： 何回でも偏微分可能

  $$C^0 \supset C^1 \supset C^2 \supset \ldots \supset C^\infty$$

- C^n 級であることは、微分可能性、テイラー展開可能性などの前提となる。

合成微分（変数変換）

- ライプニッツ流で書けば：
  (5.1.8) $z=f(x,y)=f(x(t),y(t))$ のとき
  $$z'(t)=z_x(x,y)\,x'(t)+z_y(x,y)\,y'(t)$$

  (5.1.9) $z=f(x,y)$, $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$のとき
  $$z_u=z_x\,x_u+z_y\,y_u$$
  $$z_v=z_x\,x_v+z_y\,y_v$$

- 特に線形変換、極座標変換の場合が重要

MATLAB での偏導関数の計算

- Symbolic mode で diff 関数を使う。
  例:

```
>> syms x y
>> f = x * exp(-(x^2+y^2))
>> fx = diff(f, x)
>> fy = diff(f, y)
```

- 詳しくは資料やヘルプ、オンラインマニュアル参照。

「微分」の概念：　1変数関数

- 定義：　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$　常微分
  - 点 x での微係数
  - x を動かした微係数の全体：　導関数
- 「微分可能」

  ⇒上の極限値が存在

  ⇒グラフ上の2点を結ぶ直線の傾きの極限

  ⇒直線（接線）で近似できる　⇒　「滑らか」

  ⇒局所的に1次式で近似できる。

$$dy=f'(x)dx$$

「微分」の概念：　多変数関数へ

- $dy = f'(a)dx$

  $(a, f(a))$ を原点とする dx-dy 座標系における直線の方程式（接線の方程式）。

- $dz = f_x(a,b)dx + f_y(a,b)dy$
  - $f(x,y)$ は局所的に2変数の１次式で表せる。
  - $(a,\ b,\ f(a,b))$ を原点とする dx-dy-dz 座標系における平面の方程式（接平面の方程式）。
  - $f(x,y)$ は「滑らか」（グラフが連続・角のない曲面）

（全）微分可能な関数

- C^1 級であることは微分可能な十分条件
  - 以下では「微分可能」と C^1 級であることとを同一視する。
- 微分可能なら、任意の方向に偏微分可能
- 接平面が存在
- 形式的な計算の簡素化

偏微分についての注意事項（1）

- $f(x,y)$ において x, y は独立変数だから、

$$\frac{\partial y}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial x}{\partial y}=0 \qquad \text{また} \qquad \frac{\partial x}{\partial x}=1, \quad \frac{\partial y}{\partial y}=1$$

  – 偏微分の定義より明らか：$f(x,y)=y$ としてみる。
  – 上は1変数関数の「逆関数の微分」とは違うので要注意！！

  – 一般の変数の場合でも同じ。例えば極座標だと r, θ が独立変数で：

$$\frac{\partial r}{\partial \theta}=0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r}=0$$

偏微分についての注意事項（2）

- 全微分：　$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$
  を x で偏微分する：
  やや雑だが、両辺を dx で「割り」、∂x 等で置き換える。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x,y)\frac{\partial x}{\partial x} + f_y(x,y)\frac{\partial y}{\partial x}$$

前ページの関係により、$\dfrac{\partial z}{\partial x} = f_x(x,y)$ となって偏導関数の定義に戻る。

全微分(あるいは単に「微分」)

- 定義: $f(x,y)$ は領域 D で定義されているとする。
  定数 A, B に対し $(a,b)\in D$ で:

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=Ah+Bk+\varepsilon\rho$$

$$\rho=\sqrt{h^2+k^2},\quad \boxed{\varepsilon\to 0\ (\rho\to 0)}$$

  が成り立つなら、$f(x,y)$ は点 (a,b) で
  「全微分可能」(あるいは単に「微分可能」)

- なぜ D を考える必要があるか？
  - 「$f(x,y)$ は (a,b) の近傍で存在する」ことがポイント

全微分の「意味」（１）

- 全微分の定義は、そのままでは意味を理解しづらい。
  - 参考：　１変数関数の場合：

$$f(a+\rho)-f(a)=A\rho+\varepsilon\rho \qquad \varepsilon\to 0\ (\rho\to 0)$$

ここで商（微分商）をとることができた。

$$\frac{f(a+\rho)-f(a)}{\rho}=A+\varepsilon \qquad \varepsilon\to 0\ (\rho\to 0),\quad A=f'(a)$$

- ２変数の場合、単純に割り算を行うことができない。

全微分の「意味」(2)

- ポイント:
  $f(x,y)$ は、局所的には1次式で近似可能
  - $Ah+Bk$ という1次式に対し、誤差項 ε は「どのように $\rho\to 0$ をとっても」0 に収束する。

- 「全微分可能なら偏微分可能」
  - $k=0$ とすれば $f(a+h,b)-f(a,b)=Ah+\varepsilon\,|h| \Rightarrow A=f_x(a,b)$
  - $h=0$ とすれば $f(a,b+k)-f(a,b)=Bk+\varepsilon\,|k| \Rightarrow B=f_y(a,b)$

任意の方向への偏微分

- θ方向への偏微分

$$f_\theta(x,y)=\lim_{r\to 0}\frac{f(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)-f(x,y)}{r}$$

- $f(x,y)$ がC^1 級なら：

$$f_\theta(x,y)=f_x(x,y)\cos\theta+f_y(x,y)\sin\theta$$

- 微分の観点からは、 $dx=\cos\theta\, d\theta \quad dy=\sin\theta\, d\theta$
として $dz=f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy$

$$=f_x(x,y)\cos\theta\, d\theta+f_y(x,y)\sin\theta\, d\theta$$

全微分の「意味」（３）

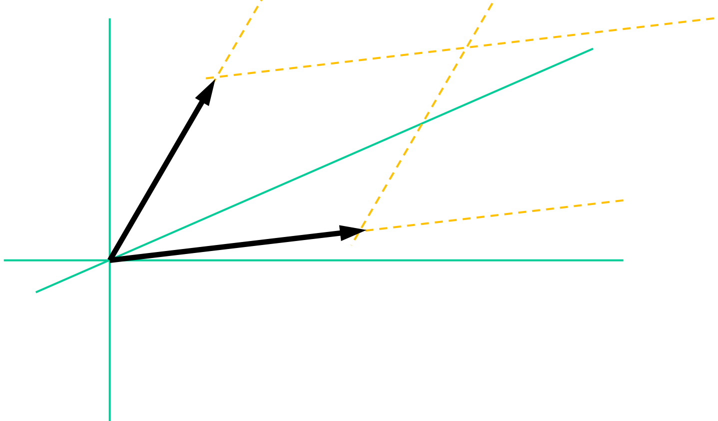
- 微分：
$$df = dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$
  - 局所変数 dz は、dx, dy の１次式で表せる。

- 微分可能の十分条件
  - C^1級：f_x, f_y が存在し、ともに連続
  - しかし任意の（直線）方向に偏微分可能であっても、微分可能とは限らない。
  - 一方、微分可能なら任意の方向に偏微分可能

復習（？）:　平面の方程式（１）

- パラメタ形式
  １次独立な2つの空間ベクトルにより平面（の向き）が決まる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\,\mathbf{a} + t\,\mathbf{b} + \mathbf{c} = s\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = s\,a_x + t\,b_x + c_x \\ y = s\,a_y + t\,b_y + c_y \\ z = s\,a_z + t\,b_z + c_z \end{matrix}$$



点 **c** を通り、**a, b** により決まる平面

復習（？）： 平面の方程式（2）

- 平面の方程式（陰形式）

$$ax + by + cz + d = 0$$

（a,b,c の1つは0 でない）

法線ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (\neq \mathbf{0})$ と直交する平面

- 平面の方程式（陽形式）

$$z = ax + by + c$$

法線ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$ 勾配ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

全微分の「意味」(4)

- 局所的に1次式で表せる
  ⇒平面の方程式　⇒　「接平面」(が存在)
  $$dz = f_x(a,b)dx + f_y(a,b)dy$$
  はそのままで、$(a, b, f(a,b))$ を原点とする dx-dy-dz 座標系での<u>**接平面の方程式**</u>を表す。xyz 座標系では:
  $$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

(p.178, 5.1.15 参照)

全微分の「意味」(５)

- 接平面は、xy 平面に対し、ある方向に水平、それと直交する方向で傾きが最も大きくなる。
  – 勾配ベクトル $(f_x(a,b)\ \ f_y(a,b))$ の方向が最も傾きが大きい。
  – これと直交する $(-f_y(a,b)\ \ f_x(a,b))$ は、等高線の接線方向になる。

- 参考：等高線 $f(x,y)=k$ の描き方
  – 各点での $f(a,b), f_x(a,b), f_y(a,b)$ を求め、上記方向に等高線の断片を引き、それを適宜つなぐ。

合成関数の微分：　1変数 (5.1.8)

- x, y が t の関数として $x(t), y(t)$ と表されるとする。このとき $f(x,y) = f(x(t),y(t))$ は t を変数とする1変数関数 $f^*(t)$ と見なせる。
- $f(x,y)$　が全微分可能なら:

$$\frac{df}{dt} = f_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f_y(x, y)\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

これは全微分の式の両辺を dt で割ったことに相当する。

応用例

- $f(x,y) = x \pm y$ のとき　$f_x(x,y) = 1,\ f_y(x,y) = \pm 1$

$$df = d(x \pm y) = dx \pm dy \quad \Rightarrow \quad \frac{d(x \pm y)}{dt} = \frac{dx}{dt} \pm \frac{dy}{dt}$$

- $f(x,y) = xy$ のとき　$f_x(x,y) = y,\ f_y(x,y) = x$

$$df = d(xy) = ydx + xdy \quad \Rightarrow \quad \frac{d(xy)}{dt} = y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}$$

- これらは１変数関数の和・差・積の微分公式にほかならない。（２変数関数の立場から見れば、単に全微分・合成部分の特別な場合）

合成関数の微分：　２変数 (5.1.9) ＝ 変数変換の公式

- 変数 (x, y) が (u, v) で表され、偏微分可能

$$x = x(u,v)$$
$$y = y(u,v)$$

- $z=f\,(x,y)$ が全微分可能なら：

$$\frac{\partial z}{\partial u} = z_x \frac{\partial x}{\partial u} + z_y \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = z_x \frac{\partial x}{\partial v} + z_y \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

変数変換の公式(2)

- 下の形のほうが見やすい

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u$$

$$z_v = z_x x_v + z_y y_v$$

- 行列形式で表すと: $\begin{pmatrix} z_u \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix}$
- この行列を「ヤコビ行列」と言う(p.230)。
- 偏導関数の組 (z_x, z_y) はヤコビ行列により (z_u, z_v) に変数変換される。

変数変換の代表例：　極座標

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

$$x_r = \cos\theta \qquad y_r = \sin\theta$$

$$x_\theta = -r\sin\theta \quad y_\theta = r\cos\theta$$

- したがって： $z_r = z_x \cos\theta + z_y \sin\theta$

$$z_\theta = z_x \cdot (-r\sin\theta) + z_y \cdot r\cos\theta$$

- 行列形式では： $\begin{pmatrix} z_r \\ z_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \end{pmatrix}$

発展：　全微分の変換不変性

- 全微分の「値」は、変数変換により変わらない。

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

- これは合成微分（変数変換）の公式から導くことができるし、逆に不変性が成り立つことから、変数変換公式を導くこともできる。

平均値の定理

- (5.1.11)

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)$$

$$=f_x(a+\theta h,b+\theta k)\cdot h+f_y(a+\theta h,b+\theta k)\cdot k$$

となる $0<\theta<1$ が存在する。

- (5.1.12)

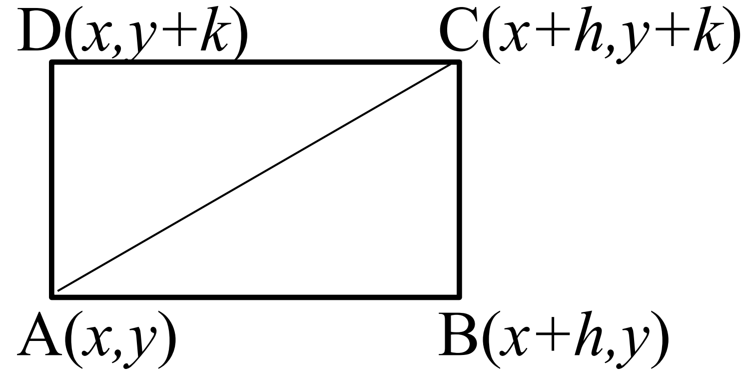
$$f(a+h,b+k)$$

$$=f(a,b)+f_x(a,b)\cdot h+f_y(a,b)\cdot k+R(h,k)$$

$$R(h,k)/\sqrt{h^2+k^2}\to 0$$

- テイラー展開への第1歩

平均値の定理(2)



- ４点 $A(x, y)$, $B(x+h, y)$, $C(x+h, y+k)$, $D(x, y+k)$ をとる(右上図)。各点での関数値を $f\,(A) = f\,(x,y)$ のように表す。

- 接平面上では、A→C の対角線方向への移動に伴い、x方向には $f_x(a,b)h$, y方向には $f_y(a,b)k$ だけ変化する。
  - (5.1.11) 対角線上にこの変化率と一致する点が存在
  - (5.1.12) h,k が十分小さければ、接平面上の移動と同一視できる。

高階（高次）の偏導関数 (5.2.1)

- $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ はそれ自身、x, y の関数だから、一般にはさらに偏微分することができる。
- ２階の（第２次の）偏導関数：

$$\frac{\partial}{\partial x} f_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \quad \frac{\partial}{\partial y} f_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_y = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} \quad \frac{\partial}{\partial y} f_x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2$$

- ３階（第３次）以上の場合も同様

C^n 級関数

- $f(x,y)$ の１階偏導関数 f_x, f_y が存在して連続なら、C^1級関数と言う。
  - C^1級関数は（１階）全微分可能
- 同様に、２階偏導関数 $f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$ が存在して連続なら、$f(x,y)$ はC^2級関数
- 以下同様に n階偏導関数が存在して連続なら、$f(x,y)$ はC^n級関数、無限回偏微分可能なら C^∞級関数
- 一般には　$f_{xy} \neq f_{yx}$ だが、C^2級なら　$f_{xy} = f_{yx}$ (5.2.3) 以下も同様。