解析 II レポート（第 1 回）解答・解説

平成 25 年 5 月 17 日

1. <u>級数の収束判定、和</u>

(a) $\underline{a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{n} \text{ のときの } \sum_{n=1}^{\infty} a_n}$

（出題プリントで a_n の前の $\dfrac{1}{2}$ が抜けていたことをお詫びします。）

まず任意の n について $a_n > 0$ は明らか（きちんと証明するには数学的帰納法を使う）。したがって部分和数列： $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ は単調増加である。

各項を並べると：

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= \tfrac{1}{2}a_1 + \tfrac{1}{1} \\
a_3 &= \tfrac{1}{2}a_2 + \tfrac{1}{2} \\
a_4 &= \tfrac{1}{2}a_3 + \tfrac{1}{3} \\
&\cdots \\
a_{n+1} &= \tfrac{1}{2}a_n + \tfrac{1}{n}
\end{aligned}
$$

両辺を足し合わせると：

$$a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k + 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

つまり：

$$S_n = 2 - 2a_{n+1} + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\spadesuit)$$

($\spadesuit$) の右辺最後の項は調和級数で、$n \to \infty$ のとき ∞ に発散する。したがって左辺の級数も ∞ に発散すると言ってよさそうだが（そして結果としてはそれで正しいのだが)、それだけでは不十分である。右辺の $-2a_{n+1}$ の影響を考えていないからである。

それには a_n の大きさを調べればよい。実際には以下のいずれかを示せば十分である。

- a_n は（正であり、かつ）上に有界
- $n \geq 2$ では a_n は単調減少
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

（練習： 上のそれぞれを示せ。）

もっとも今の場合、もっと簡単な議論で十分である。
部分和 S_n は単調増加だから、有限な値に収束するか、$+\infty$ に発散するかのいずれかである。そこで収束すると仮定する。すると ($\spadesuit$) の右辺で $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ の項は ∞ に発散するから、$a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ であることが必要である。しかし $a_n \to \infty$ なら明らかに S_n は ∞ に発散するから矛盾、したがって $\underline{S_n \to \infty \text{（発散）}}$ である。

注: 本問の場合、ダランベールの判定法（やコーシーの判定法）はそのままでは使えない。漸化式の両辺を $a_n(>0)$ で割ると：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{na_n}$$

となるが、$\dfrac{1}{na_n}$ の項がどうなるかがすぐにはわからないからである。実際には $na_n \to 2$、つまり $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ となる（証明せよ）。したがってどのみちダランベールの判定法は使えない。コーシーの判定法も同様である（省略）。

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \cdots$

ヒントにしたがって：

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

を考える。等比級数：

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (|x| < 1)$$

の両辺を項別に積分すると：

$$\int_0^x f(x)dx = -\log(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

ここで $x = \dfrac{1}{2}$ とすれば右辺は与式と一致するので：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = -\log\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\log\frac{1}{2} = \underline{\log 2}$$

$\log x$ のテイラー展開：

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \qquad (-1 < x \leq 1)$$

を直接使うのでもかまわない。x に $-x$ を代入すれば：

$$\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \qquad (-1 \leq x < 1)$$

となって上と同じ。

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{\sqrt{2}}} + \frac{1}{2^{\sqrt{3}}} + \frac{1}{2^2} + \cdots$

本問は少し難しい。まず収束性を考えよう。

本問も、ダランベールやコーシーの判定法では判定がつかない。$a_n = \dfrac{1}{2^{\sqrt{n}}}$ とおくと：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n+1}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

で、どちらも $n \to \infty$ のとき 1 に収束するからである。

$a_n > 0$ なので級数は正項級数であり、部分和 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{\sqrt{k}}}$ は単調増加で、上に有界であれば収束する。結論から言えば収束するのだが、それを優級数（本問の級数より各項が大きく、収束する級数）を使って示そう。

a_n が単調減少であるのは明らかであり、

$$a_{n^2} > a_{n^2+1} > a_{n^2+2} > \cdots > a_{(n+1)^2-1} > a_{(n+1)^2}$$

ここで

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

だから、a_{n^2}, a_{n^2+1}, $\cdots$, $a_{(n+1)^2-1}$ は $2n+1$ 項あり、

$$a_{n^2} + a_{n^2+1} + \cdots + a_{(n+1)^2-1} = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} a_k < (2n+1)a_{n^2} = \frac{2n+1}{2^{\sqrt{n^2}}} = \frac{2n+1}{2^n}$$

したがって平方数 n^2 に対し：

$$S_{n^2} = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{2^{\sqrt{k}}} \ < \ \sum_{k=1}^{n} \frac{2n+1}{2^n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (\diamondsuit)$$

任意の自然数 m に対し $n^2 \leq m < (n+1)^2$ となる自然数 n が存在し、

$$S_{n^2} \leq S_m < S_{(n+1)^2}$$

だから、$(\diamondsuit)$ の右辺の級数が収束すれば、本問の級数も収束する。ところが（問題 2(a) などを参照すれば)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

だから、

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2n+1}{2^n} = 5$$

したがって：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} < 5$$

となり、上に有界だから本問の級数は収束する。その極限値を A とすると、下からの評価同様にできて、$\dfrac{5}{2} < A < 5$ となる。

収束の証明としては、十分大きな n に対しては $2^{\sqrt{n}} > n^2$ を利用して $\sum \frac{1}{n^2}$ と比較するなどの方法もある。

それでは A の値はどうなるだろうか？
結論から言えば、調べたりした範囲では、A を表す具体的な式は得られそうもない。つまり収束することはわかるが、その和を表す（簡単な）方法はない、ということである。数値計算すると：

$$A = 3.78821923064795395...$$

となることはわかる。

練習： $3 < A < 4$ を示せ。

2. $x = 0$ におけるテイラー展開と収束半径

(a) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

だから、2 行目を項別微分すると：

$$\underline{f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots}$$

項別微分した整級数の収束半径は元の整級数の収束半径と同じだから、<u>収束半径は 1</u>。

<u>別解 1</u>

テイラー級数の定義から直接求めることもできる。一般に n が自然数のとき：

$$\left(\frac{1}{(1-x)^n}\right)' = (1-x)' \cdot \left(-\frac{n}{(1-x)^{n+1}}\right) = \frac{n}{(1-x)^{n+1}}$$

だから（練習）、

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)^{(n)} = \frac{2 \cdot 3 \cdots (n+1)}{(1-x)^{n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = n+1$$

したがって上を得る。

<u>別解 2</u>

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)$$

を展開することも考えられる。x^n の係数（=項の数）は $i+j=n$ となる 0 以上の整数の組合せの数だから $n+1$、したがって上を得る。

(b) $\underline{f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}}$

教科書 p.162 の問題 3-5) を参照。それよりは（少し）易しい。

$$1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2) \quad \text{つまり} \quad \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{1-x^3} \quad (x \neq 1)$$

したがって $\frac{1}{1-x^3}$ のテイラー展開に $1-x$ を掛ければいい。あるいは $\frac{1}{1-x^3}$ のテイラー展開から $\frac{x}{1-x^3}$ のテイラー展開を引くのでも同じことである。

$\frac{1}{1-x^3}$ のテイラー展開は、

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

の x に x^3 を代入して：

$$\frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} \quad (|x^3| < 1)$$

$|x^3| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$ だから収束半径は 1。

これに $1-x$ を掛けると収束半径は 1 のままで：

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2} = (1-x)(1 + x^3 + x^6 + \cdots) = (1 + x^3 + x^6 + \cdots) - (x + x^4 + x^7 + \cdots)$$

$$= \underline{1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \cdots}$$

つまり $\frac{1}{1+x+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書くと、n を 3 で割った余りで場合分けして：

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 3k) \\ -1 & (n = 3k+1) \\ 0 & (n = 3k+2) \end{cases}$$

(c) $\underline{f(x) = \frac{\sin x}{x}\text{、ただし } f(0) = 1}$

$\sin x$ のテイラー展開：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

の両辺を x で割ると、右辺は割り切れて整式になり：

$$\underline{f(x) = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}}$$

右辺は $x=0$ のとき 1 になり、$f(0)=1$ に対応している。収束半径は $\sin x$ と同じで ∞ である。

$f(0)=1$ というのはお馴染みの $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ に対応しており、$f(x)$ が $x=0$ の場合も含めて無限回微分可能（C^∞ 級関数）であることを示している。しかし $f^{(n)}(x),\ f^{(n)}(0)$ を直接求めるのは大変面倒である。

3. $\underline{e^{-x} \text{ のテイラー展開と } e \text{ の値}}$

e^x のテイラー展開：$\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ は収束半径は ∞ であり、$x=1$ を代入すれば：

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

となる。授業でも述べたように、これは収束は速いが、正項級数であるため、下からの近似値しか得られない。上側からの評価、さらには上下両側からの評価が得られることが望ましい。

(a) $\underline{f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x} \text{ のテイラー展開}}$

$\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ の x に $-x$ を代入すればいいから：

$$\frac{1}{e^x} = e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

(b) $\underline{2.71 < e < 2.72}$

e^{-x} のテイラー展開で $x=1$ とおくと（あるいは最初から e^x のテイラー展開で $x=-1$ とおくと）

$$e^{-1} = \frac{1}{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$

これは（収束する）交項級数で、各項の絶対値 $\dfrac{1}{n!}$ は単調減少、部分和を S_n と書くと：

$$0 = S_1 < S_3 < \cdots < S_{2n+1} < \cdots < \frac{1}{e} < \cdots < S_{2n} < \cdots < S_2 < S_0 = 1$$

のように奇数項・偶数項で交互に上下から押さえられる。逆数をとれば：

$$\frac{1}{S_0} < \frac{1}{S_2} < \cdots < e < \cdots < \frac{1}{S_5} < \frac{1}{S_3}$$

（$S_1 = 0$ なので逆数はとれない）。計算としては、S_n の各項を順に分数計算し、最後に逆数→小数に直せばよい。S_n の分母は $n!$、S_{n+1} の分母は $(n+1)!$ なので、分数計算では途中で約分しない方が楽。

$$S_0 = 1$$
$$S_1 = S_0 - 1 = 0$$
$$S_2 = S_1 + \frac{1}{2!} = \frac{1}{2!}$$
$$S_3 = S_2 - \frac{1}{3!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{3\cdot 1 - 1}{3!} = \frac{2}{3!}$$
$$S_4 = S_3 + \frac{1}{4!} = \frac{2}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{2\cdot 4 + 1}{4!} = \frac{9}{4!}$$

$$S_5 = S_4 - \frac{1}{5!} = \frac{9}{4!} - \frac{1}{5!} = \frac{9\times 5 - 1}{5!} = \frac{44}{5!} \left(= \frac{11}{30}\right)$$
$$S_6 = S_5 + \frac{1}{6!} = \frac{44}{5!} + \frac{1}{6!} = \frac{44\times 6 + 1}{6!} = \frac{265}{6!} \left(= \frac{53}{144}\right)$$
$$S_7 = S_6 - \frac{1}{7!} = \frac{265}{6!} - \frac{1}{7!} = \frac{265\times 7 - 1}{7!} = \frac{1854}{7!} \left(= \frac{103}{280}\right)$$

この調子で必要な項まで求めていけばいいが、逆数→小数の計算が少し面倒なので、あらかじめ何項まで求めればいいのかの見積もりをつけておくことも考えられる（解答上必須ではないが）。

e の値を 0.01 の幅で評価するのだから：
$$\left|\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}}\right| < 0.01 = \frac{1}{100}$$
は必要条件（だが十分条件ではない）。上を変形すると：
$$\left|\frac{S_{n+1} - S_n}{S_n S_{n+1}}\right| < \frac{1}{100}$$
$$|S_{n+1} - S_n| = \frac{1}{(n+1)!} < \frac{S_n S_{n+1}}{100} < \frac{1}{900}$$
ただし S_n, S_{n+1} は小さめに 1/3 として見積もった。これだと：
$$\frac{1}{6!} = \frac{1}{720} > \frac{1}{900}, \qquad \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} < \frac{1}{900}$$
だから $n=5$ ではやや不足、$n=6$ までとれば一応十分と見込まれる。あとは計算してしまったほうが早い。
$$\frac{1}{S_5} = \frac{30}{11} = 2.7272... \qquad \frac{1}{S_6} = \frac{144}{53} = 2.7169... \qquad \frac{1}{S_7} = \frac{280}{103} = 2.7184...$$
したがって
$$\frac{1}{S_6} < e < \frac{1}{S_7} \quad \text{より} \quad 2.7169... < e < 2.7184...$$
となるので、$\underline{2.71 < e < 2.72}$ が成り立つ。

実際にはもっと精密に、$e = 2.71...$ で、小数第 3 位は 6, 7, 8 のいずれかまで絞れている。そこで $e = 2.718...$ まで確定させるには、上からの評価ではすでに 2.718... が得られているから、下からの評価を行えばよい。それには：
$$\frac{1}{S_8} = \frac{5760}{2119} = 2.7182...$$
とするのでもよいが、もとの e^x のテイラー展開に戻って：
$$e > 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2 + \frac{517}{720} = 2.71805...$$
を使うほうが簡単だろう。

<u>※ 別解</u>

直接 e^x のテイラー展開を使ってもできる。$x = 1$ とし、n までの部分和を T_n とすると：
$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$
$$\begin{aligned} e - T_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right) \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1} \end{aligned}$$
（右辺は等比級数で上から押さえた）。したがって：
$$T_n < e < T_n + \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}$$
$n = 5$ とすれば 2.7166... $< e <$ 2.718287...

$n = 6$ とすれば 2.7180... $< e <$ 2.718282...

を得る（計算略）。

4. arctan x のテイラー展開と π の近似値

arctan x のテイラー展開：

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (-1 < x \leq 1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \ (\heartsuit)$$

において、第 n 項を $a_n(x)$、第 n 項までの部分和を $S_n(x)$ と書く。

$$a_n(x) = \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$S_0(x) = x$$

$$S_1(x) = x - \frac{x^3}{3} = x\left(1 - \frac{x^2}{3}\right)$$

$$S_2(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} = x\left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5}\right)$$

といった具合である。

$(\heartsuit)$ は（収束半径内のすべての x に対して）交項級数であり、

$$\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \frac{2n+1}{2n+3} x^2$$

なので $|a_n(x)|$ は単調減少だから：

$$S_1(x) < S_3(x) < \cdots < S_{2n+1}(x) < \cdots < S_{2n}(x) < \cdots < S_2(x) < S_0(x)$$

が成り立つ。ここまでは前問と同じだが、e^x に比べて arctan x のテイラー展開は収束が格段に遅いという問題がある。実際、$\tan \frac{\pi}{4} = 1$、つまり $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ であり、$(\heartsuit)$ は $x = 1$ でも収束するから（アーベルの定理、教科書 (4.2.21), (4.2.22), (1.1.7)）

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

と表せるが（ライプニッツ級数）、これは収束が非常に遅い。

そこでどうするかだが、x が小さければ $(\heartsuit)$ の収束は速くなる。そこで tan が既知の小さな角を考えると：

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{つまり} \qquad \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

だから：

$$S_{2n+1}(\tfrac{1}{\sqrt{3}}) \ < \ \frac{\pi}{6} \ < \ S_{2n}(\tfrac{1}{\sqrt{3}})$$

が成り立つ。n に具体的な値を当てはめると（各辺を 6 倍して）：

$$\begin{array}{rcl} & \pi & < \ 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3}\right) & < & \pi \\ & \pi & < \ 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2}\right) \\ 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3}\right) & < & \pi \end{array}$$

といった具合である。手計算でやる場合には $\sqrt{3}(= 1.732...)$ をどうするかが問題だが、$P_n = 6S_n(\frac{1}{\sqrt{3}})$ として数値計算結果を示すと：

$P_0 = 3.464...$
$P_1 = 3.079...$
$P_2 = 3.156...$
$P_3 = 3.137...$

となり、P_2, P_3、つまり：

$$2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3}\right) \ < \ \pi \ < \ 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2}\right)$$

までで $3.13 < \pi < 3.16$ が確定する。

<u>別解 1</u>
より小さい角となると：

$$\tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}} = 2 - \sqrt{3}$$

を使うことも考えられるが、計算は繁雑になる。

<u>別解 2</u>
tan の加法定理を使うなら、やや天下りになるが：

$$\tan\alpha = \frac{1}{2}, \quad \tan\beta = \frac{1}{3}$$

とおくと、$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ が成り立つ（両辺の tan をとって確かめよ）。したがって：

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

となる。右辺に (♡) を当てはめると、π の近似値として：

$P_0 = 3.333...$
$P_1 = 3.117...$
$P_2 = 3.145...$
$P_3 = 3.140...$

となり、P_2, P_3 までで $\pi = 3.14...$ が確定する。

このような arctan を用いて π を表す公式として、もっと収束が速いものにマチン (Machin) の公式がある：

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$

マチンの公式は、計算機による円周率計算の初期には用いられていたが、現在でははるかに収束の速い他の公式により、π は 10 兆桁まで求められている。

> <u>※ 注</u>：このあたりの話は教科書 pp.27–28 あたりにも出ているので（気づいていなかった）、そちらも参照してほしい。教科書には「十億桁」とあるが、出版されてから１０年足らずの間に円周率計算も急速に進展している。