

# 2章に入ります p.34 ~ 連立1次方程式と行列

## 2.1 基本変形

全体をスカラー倍

第1式から、第2式のスカラー倍を引く

ここに0を作り出そうとしている。

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + 4y = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1y = 4 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = -4 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

この手法だけに着目する。

これは2変数2次式だからこの程度で済んだけど...  
それを行列でやりましようという話

### 行の基本変形

列の基本変形をしたければ転置すればいいから、本質的には変わらない

- ① ある行をスカラー倍する。  
ただし、0倍は除く

(同値変形(情報を失わなければ)確認しなくてよい。  
基本変形は戻すことができればならない。)

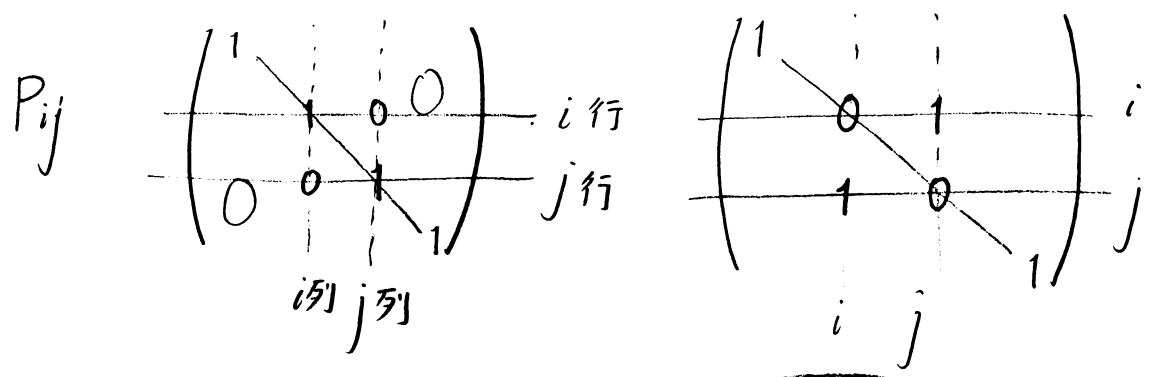


② 置換 (席替え)

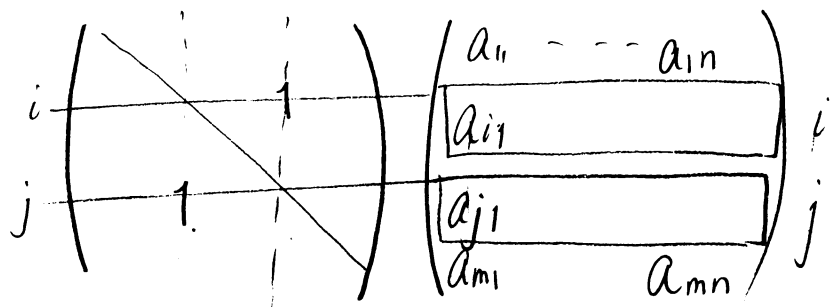
互換 (2人だけ席を交換する)

まず一気に好きな所に座り直したら写像になる。  
 そして互換をくり返したら、元に戻すことができる。  
 いい帰納法の練習問題です。

- 1人のときは必ず同じ席
- 2人のときは同じ席の逆 (→ 互換すればOK)
- (n-1)人だったらOKのとき
- n人のときは?



互換行列



ほとんどは単位行列  
 だから、  
 i, j 行以外は  
 変化なし。

i 行をスルーして  
 j 行にヒトする。

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{ji} & \dots & a_{jn} \\ a_{il} & \dots & a_{in} \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

行列のかけ算で実現させているのはかんたんだから? 代数的に A とかんたんにかけるから?

③  $E_{ij}(c) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & c & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$   $i$ 行  
 $(i \neq j)$   $j$ 列  
 単位行列では 0

$i$ 行  $j$ 列のところに  $c$ を置く

$$i \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & c & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{i1} & & \\ a_{j1} & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} i \text{行} \\ \\ j \text{行} \end{matrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} + c a_{j1} & \dots & a_{in} + c a_{jn} \\ \dots & & \\ \dots & & \end{pmatrix}$$

$i$ 行以外は変わらない  
 1で  $a_{i*}$ にはヒットする、  
 $i$ 行目の成分  
 $c$ で  $j$ 行目の成分にもヒットする

$(i, j)$ 成分に書いた場合には、  
 $i$ 行だけが変化することになる

- じゃあ本当に3つの基本変形が必要ですか？  
2つからもう1つを作り出せない？

- 基本変形は基本変形によって元に戻せる

$$E_i(c) \rightarrow E_i\left(\frac{1}{c}\right)$$

$$P_{ij} \rightarrow P_{ij}$$

$$E_{ij}(c) \rightarrow E_{ij}(-c)$$

- 右からかけたら？

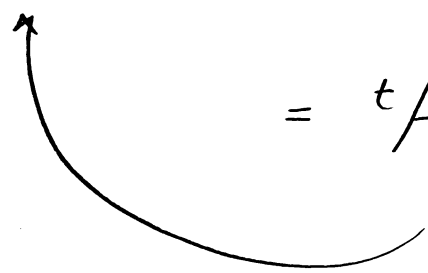
$$E_i(c), \quad P_{ij}, \quad E_{ij}(c)$$

$c \neq 0$                        $i \neq j$

転置したらどうなる？

$$\begin{cases} {}^t E_i(c) = E_i(c) \\ {}^t P_{ij} = P_{ij} \\ {}^t E_{ij}(c) = E_{ji}(c) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} {}^t(E_{ij}(c) A) &= {}^t A {}^t(E_{ij}(c)) \\ &= {}^t A E_{ji}(c) \end{aligned}$$



右からかけることは左からかけて転置したのと同じだから、  
列の基本変形