2章に入ります　p.34〜

連立1次方程式と行列

2.1 基本変形

全体をスカラー倍

第1式から、第2式のスカラー倍を引く

ここに0を作り出そうとしている

$$\begin{cases} 3x+5y=1 \\ 2x+4y=-2 \end{cases} \to \begin{cases} 3x+5y=1 \\ x+2y=-1 \end{cases} \to \begin{cases} \quad -1y=4 \\ x+2y=-1 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} y=-4 \\ x+2y=-1 \end{cases}$$

この手法だけに着目する。

これは2変数2次式だからこの程度で済んだけど…

それを行列でやりましょうという話

行の基本変形

列の基本変形をしたければ転置すればいいから、本質的には変わらん

① ある行をスカラー倍する。

ただし、0倍は除く

(同値変形(情報を失わなければ) ~~確認しなくてよい。~~

基本変形は戻すことができなければならない。)

② 2つの行を交換する。

③ ある行をスカラー倍して他の行に加える。

自分の行では、−1倍したときに
復元できなくなる。

1年生の段階は行だけ
2年だと行と列を同時に変形します。
扱う相手はもっと難しい相手を扱うんだけど

これは、
正方行列を(左から)かけることで実現できる。

①
$$E_i(c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & c & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$
i列

どうなるかはやってみるとわかる

$$\begin{array}{l} \\ i\text{行} \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots \; 1 & & \\ & & c & \\ & & 1 \; \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{c a_{i1} \quad c a_{ij} \quad c a_{im}} & & \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

(
i行にかからなければ単位行列なんだから
そのまま移る。
i行だけ関係する。
上からi行来たとこだけc倍になる。
)

②置換（席がえ）

互換（2人だけ席を交換する）

まず一気に好きな所に座り直したら写像になる。
そして互換をくり返したら、元に戻すことができる。
いい帰納法の練習問題です。

1人のときは必ず同じ席
2人のときは同じ席か逆（→互換すればOK）
$(n-1)$人だったらOKのとき
n人のときは？

$$P_{ij}\quad \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{pmatrix}1&&&\\&1&0&\\&0&1&\\&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ i行\\ j行\\ \\ \end{array}\qquad \begin{pmatrix}1&&&\\&0&1&\\&1&0&\\&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ i\\ j\\ \\ \end{array}$$

i列　j列　　　　i　j

互換行列

$$\begin{array}{l} \\ i\\ j\\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}\ddots&&&\\&&1&\\&1&&\\&&&\ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \boxed{a_{i1}\quad\quad}&&\\ \boxed{a_{j1}\quad\quad}&&\\ a_{m1}&&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ i\\ j\\ \\ \end{array}$$

ほとんどは単位行列
だから、
i,j行以外は
変化なし。

$$= \begin{pmatrix}a_{11}&&a_{1n}\\ a_{j1}&\cdots&a_{jn}\\ a_{i1}&\cdots&a_{in}\\ a_{m1}&&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ i\\ j\\ \\ \end{array}$$

i行をスルーして
j行にヒットする。

行列のかけ算で実現させているのはかんたんだから？　代数的にAとかんたんにかけるから？

③ $$\underset{(i \neq j)}{E_{ij}(c)} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & c & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \\ j\text{列} \end{array} \begin{array}{l} \\ i\text{行} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

単位行列では 0

i行j列のところに
cを置く

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & c & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\ j \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \boxed{a_{i1} \quad \cdots} & & \\ \boxed{a_{j1} \quad \cdots} & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ i\text{行} \\ j\text{行} \\ \\ \end{array} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{i1} + c a_{j1} \quad \cdots \quad a_{in} + a_{jn}} \\ \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \end{pmatrix}$$

i行以外は変わらない

1で $\underbrace{a_{i*}}_{i\text{行目の成分}}$ にはヒットするし、

cでj行目の成分にもヒットする

$\boxed{\text{$(i, j)$成分に書いた場合には、$i$行だけが変化することがわかる}}$

- じゃあ本当に3つの基本変形が必要ですか？
  2つからもう1つを作り出せない？

- 基本変形は基本変形によって元に戻せる

$$E_i(c) \longrightarrow E_i\left(\frac{1}{c}\right)$$

$$P_{ij} \longrightarrow P_{ij}$$

$$E_{ij}(c) \longrightarrow E_{ij}(-c)$$

- 右からかけたら？

$$\underset{c \neq 0}{E_i(c)}, \quad P_{ij}, \quad \underset{i \neq j}{E_{ij}(c)}$$

転置したらどうなる？

$$\begin{cases} {}^tE_i(c) = E_i(c) \\ {}^tP_{ij} = P_{ij} \\ {}^tE_{ij}(c) = E_{ji}(c) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} {}^t(E_{ij}(c)A) &= {}^tA\,{}^t(E_{ij}(c)) \\ &= {}^tA\,E_{ji}(c) \end{aligned}$$

右からかけることは左からかけて転置したのと同じだから、
列の基本変形