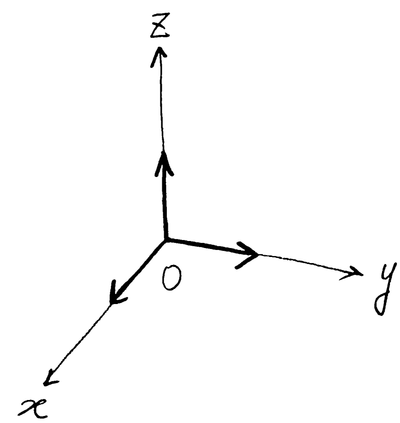
まず外積のつづき.

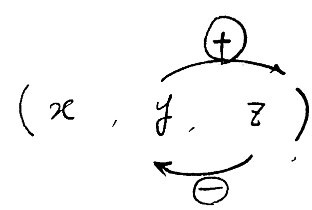
$\mathbb{A} \times \mathbb{A} = 0$ より,

$$e_x \times e_x = e_y \times e_y = e_z \times e_z = 0.$$

$$\begin{cases} e_x \times e_y = -e_y \times e_x = e_z \\ e_y \times e_z = -e_z \times e_y = e_x \\ e_z \times e_x = -e_x \times e_z = e_y \end{cases}$$



(外積の公式を覚えなくても
単位ベクトルとそのスカラー倍毎に
分解すれば計算できる人だな?)



(

$$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = (A_y B_z - A_z B_y) e_x + (A_z B_x - A_x B_z) e_y + (A_x B_y - A_y B_x) e_z$$

$$= \det \begin{pmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}$$

3.2 ベクトルの微分（時間ではなく空間微分）

(1) 偏微分

関数 $f(x, y, z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

関数 $f(x, y, z)$ の微小変化

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

高階微分

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x \Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

(2) 方向をもった微分

微分演算子 (nabla) ← ベクトルです。

$$\nabla \equiv \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

勾配 (gradient) : ∇ にスカラー量を作用させたもの

$$\nabla f = \mathrm{grad} f = \mathbf{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

例えば定数関数 $f(x, y, z) = a$ は、

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$$ であり、

その等値面接線ベクトル(?)は、

$$\mathbf{s} = dx\,\mathbf{e}_x + dy\,\mathbf{e}_y + dz\,\mathbf{e}_z$$

で、

$df = 0$ であることは、

$$\mathbf{s} \cdot \nabla f = \mathbf{s} \cdot \mathrm{grad} f = 0$$

であることと同値。

$$\therefore\ \mathbf{s} \perp \nabla f \quad ?$$

発散 (divergence)

$$\nabla \cdot A = \mathrm{div} A = \left(e_x \frac{\partial}{\partial x},\ e_y \frac{\partial}{\partial y},\ e_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(A_x e_x,\ A_y e_y,\ A_z e_z \right)$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

x方向に流れだす量

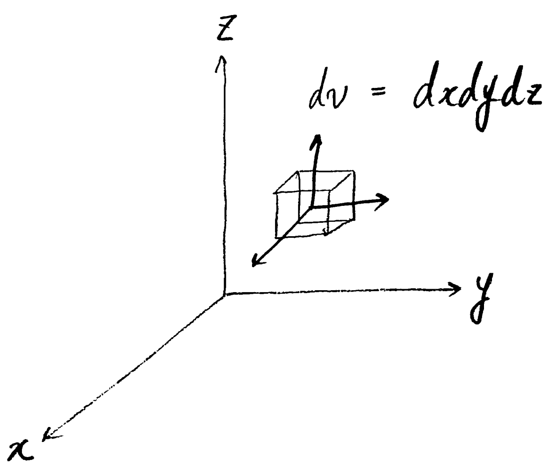
$$\frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz$$

y方向 〃

$$\frac{\partial A_y}{\partial y} dx dy dz$$

z方向 〃

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} dx dy dz$$



流れ出す量の総和

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \mathrm{div} A \cdot dx dy dz$$

$$= \mathrm{div} A \cdot dv$$

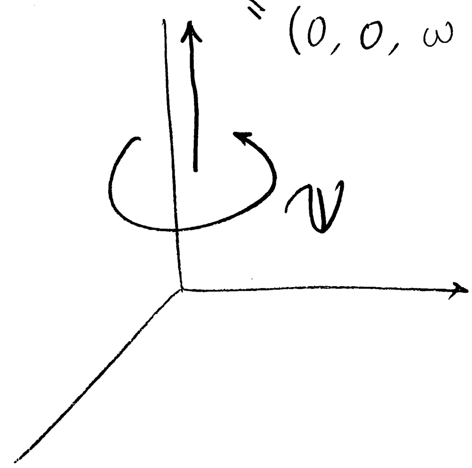
回転 (rotation) ← ∇ とベクトル量との外積 (= ベクトル)

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$$

z 軸のまわりを回転しているベクトル $\mathbf{v}$ があったとして、
その角速度ベクトルが $\mathbf{w}$ である。

$\mathbf{w} = (0, 0, \omega ?)$



速度　角速度　半径

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\mathbf{w} \times \mathbf{r})$$

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

$$= 2\mathbf{w}$$

ラプラシアン（Laplacian）

これも演算子

$$\nabla \cdot \nabla = \mathrm{div} \cdot \mathrm{grad}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

スカラーにもベクトルにも作用させる

ベクトルの場合、方向つきで微分する？

スカラー f

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ベクトル A

$$\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$$