解析 II レポート（第 1 回）

※ 提出期限：　5 月 17 日（金）授業開始時に集める。

※ レポート作成・提出上の注意（よく読むこと）

- **注：**　以下の注は 2 回目以降のレポートにも適用される。

- 期限に遅れた場合には減点ないし不受理となる。未提出レポートがあると単位は認定されないので注意すること。

  何らかの事由により提出が遅れる場合でも、その理由と途中経過を示した中間報告を必ず提出すること。

  逆に期限前に早く提出してもかまわない。

- 用紙は A4 版の紙を使用し、必ず表紙をつけること。
  用紙の種別は問わない。市販のレポート用紙がベストだが、計算機出力の裏などを用いてもよい。
  ただし用紙は片面だけを使用する。

  左上（だけ）で綴じること。

- 表紙には授業名（解析 II）、レポートの回数、提出日付（出題日でも締切日でもない）、学生番号、氏名を明記すること。

- 問題を全文写す必要はないが、問題番号や要点は明記し、どの問題を解いているかがはっきりわかるようにすること。解答は問題番号順に並べること。大設問ごとに別の用紙を使用することが望ましい。

- わからない問題でもその旨を明記すること。

- 数学のレポートといえども文章なのだから、数式の羅列にとどまらず、必要な箇所には筋道だって議論の展開を示すこと。

- （重要 1）自分で計算することも出題の眼目に入っているので、コンピュータで計算して答だけを引き写すようなことではダメ。計算過程などがちゃんと記すこと。計算のチェックとしてコンピュータを用いることはかまわない（むしろ推奨する）。

- （重要 2）参考書を調べたり友達同士で相談したり、教えてもらってもかまわない（それだけでは減点対象にはならない）。

  ただしその場合でも、答を丸写しするのではなく、自分で理解し、自分の言葉で書くこと。また出典や相談相手はレポートに明記すること。

  これらの点を守らない場合には減点対象となる。特に悪質なもの（人のレポートを丸写ししてそれを断らないなど）は無条件で落第となるので注意。

- 特に教科書に示されている結果は、導出を示さずそのまま用いてもよい（記述箇所は明記すること）。

（問題は裏面）

※問題　$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{n}$

1. 以下の級数は収束するかを判定し、収束する場合には（可能なら）その和を求めよ。

   (a) $a_1 = 1,\ \cancel{a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n}}$ のときの $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \cdots$　（ヒント： $x = \frac{1}{2}$ と置いた形で考えるとよい。）

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2^2} + \cdots$

2. 以下の関数の（$x = 0$ における）テイラー展開と収束半径を求めよ。

   (a) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

   (b) $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$

   (c) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$、ただし $f(0) = 1$

3. e^x のテイラー展開は：$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ である。

   (a) $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$ のテイラー展開を示せ。

   (b) e の値をできるだけ精密に求めよ。つまり $a < e < b$ であるような $a,\ b$ で $b - a$ ができるだけ小さくなるようなものを示せ。
   少なくとも $2.71 < e < 2.72$ 程度は示すこと。

上からおさえるヒントになっている

4. $\arctan x$（$\tan x$ の逆関数）のテイラー展開： $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$ を用いて、円周率 π の値をできるだけ精密に求めよ。
   少なくとも $3.1 < \pi < 3.2$ 程度は示すこと。

xに1以外入れるとか、
いくつかの式をくみあわせると、
加速できる？

4/26 演習問題 2.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が条件収束する。

$\sum |a_n| = \infty$

↓

$\{|a_n|\}$ の部分和が単調増加

上に有界ではない

(a) 背理法

$\{c_n\}$ が有限個と仮定する

$\{b_n\}$ も同様 (c_n, b_n 別々に有限個と仮定する
(片方は無限個にする)

(b) これも背理法

$\sum c_n = -c$ (一定の負の値に収束する) と仮定する。

(d) 言葉で説明されるとなんとなく分かった。
(かんたんな例が p.148 コメントにある)
任意の値の場合どうすればいいの.

収束域

4.2.3

4.2.4 (+4.2.5)

4.2.7 (→4.2.6)

4.2.9 (テイラーの定理)

第n近似で誤差が残る.

$n \to \infty$ のとき、誤差 → 0 になったら、

無限級数は正確に元の関数を表すことになる。

関数によっては誤差項がふくれあがっていって収束しない?

4.2.14

$$\frac{f(x) + |f(x)|}{2} \qquad \frac{f(x) - |f(x)|}{2}$$

偶関数　　奇関数

テーラー展開できれば、絶対収束する.

~~テーラー展開できない~~? 誤差が0にならない? 関数?

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots}$$

taylor (tan(x), 10)　　/* MATLAB */

↑ 次数

ベルヌーイ数

$\tan^{-1}x$ (arctan x) の taylor() はすっきりとしていて π 計算の定番

$(x+a)^n$ の taylor は 二項定理に等しい

$$\sum_{k=0}^{n} \underbrace{{}_nC_k\, a^{n-k}}_{} x^k$$

$$\downarrow$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

taylor 展開したものは 微分積分できる (4、2、16 ～)

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$$

$x = \tan\theta$ とおいて…

$$\theta = \arctan x \quad , \quad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

加減乗除が自由にできるから、

$f(x) = x e^x$ のテイラー展開を求めるのに

$$= x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

4.2.15　テイラー展開

(1)

$$f(x) = \frac{1}{1-3x+2x^2}$$

$$= \frac{1}{(1-2x)(1-x)}$$

$$= \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-1\right)x^n$$

テイラー展開を同値変形して収束を速くするのを加速法

エートケン加速法?　/* どんな関数にも使えるらしい */

eは交代級数じゃない、正項級数だから、上からおさえられない。
工夫して上からおさえるのが(別法?)レポート課題。

πを速く求める

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

マチンの公式

今はもっとちがう.

4.2.21 アーベルの連続性定理