

解析 II レポート (第 1 回)

※ 提出期限： 5 月 17 日 (金) 授業開始時に集める。

※ レポート作成・提出上の注意 (よく読むこと)

- 注： 以下の注は 2 回目以降のレポートにも適用される。
- 期限に遅れた場合には減点ないし不受理となる。未提出レポートがあると単位は認定されないので注意すること。
何らかの事由により提出が遅れる場合でも、その理由と途中経過を示した中間報告を必ず提出すること。
逆に期限前に早く提出してもかまわない。
- 用紙は A4 版の紙を使用し、必ず表紙をつけること。
用紙の種別は問わない。市販のレポート用紙がベストだが、計算機出力の裏などを用いてもよい。
ただし用紙は片面だけを使用する。
左上 (だけ) で綴じること。
- 表紙には授業名 (解析 II)、レポートの回数、提出日付 (出題日でも締切日でもない)、学生番号、氏名を明記すること。
- 問題を全文写す必要はないが、問題番号や要点は明記し、どの問題を解いているかがはっきりわかるようにすること。解答は問題番号順に並べること。大設問ごとに別の用紙を使用することが望ましい。
- わからない問題でもその旨を明記すること。
- 数学のレポートといえども文章なのだから、数式の羅列にとどまらず、必要な箇所には筋道だって議論の展開を示すこと。
- (重要 1) 自分で計算することも出題の眼目に入っているので、コンピュータで計算して答だけを引き写すようなことではダメ。計算過程などがちゃんと記すこと。計算のチェックとしてコンピュータを用いることはかまわない (むしろ推奨する)。
- (重要 2) 参考書を調べたり友達同士で相談したり、教えてもらってもかまわない (それだけでは減点対象にはならない)。
ただしその場合でも、答を丸写しするのではなく、自分で理解し、自分の言葉で書くこと。また出典や相談相手はレポートに明記すること。
これらの点を守らない場合には減点対象となる。特に悪質なもの (人のレポートを丸写してそれを断らないなど) は無条件で落第となるので注意。
- 特に教科書に示されている結果は、導出を示さずそのまま用いてもよい (記述箇所は明記すること)。

(問題は裏面)

※問題

1. 以下の級数は収束するかを判定し、収束する場合には（可能なら）その和を求めよ。

(a) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{n}$ のときの $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots$ (ヒント: $x = \frac{1}{2}$ と置いた形で考えるとよい。)

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2^2} + \dots$

2. 以下の関数の ($x = 0$ における) テイラー展開と収束半径を求めよ。

(a) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

(b) $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$

(c) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 、ただし $f(0) = 1$

3. e^x のテイラー展開は: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ である。

(a) $f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$ のテイラー展開を示せ。

(b) e の値をできるだけ精密に求めよ。つまり $a < e < b$ であるような a, b で $b - a$ ができるだけ小さくなるようなものを示せ。

少なくとも $2.71 < e < 2.72$ 程度は示すこと。

4. $\arctan x$ ($\tan x$ の逆関数) のテイラー展開: $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ を用いて、円周率 π の値をできるだけ精密に求めよ。

少なくとも $3.1 < \pi < 3.2$ 程度は示すこと。