問3.

問2で求まった速度

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\theta \cdot e^{-at} \\ \dot{y} = \left(v_0 \sin\theta + \dfrac{g}{a}\right) e^{-at} - \dfrac{g}{a} \end{cases}$$

$$x = \int \dot{x}\, dt$$

$$= \int v_0 \cos\theta \cdot e^{-at}\, dt$$

$$= -\frac{1}{a} v_0 \cos\theta\, e^{-at} + C$$

初期条件 $t = 0$, $(x, y) = (0, 0)$ より、

$$0 = -\frac{1}{a} v_0 \cos\theta + C$$

$$\therefore C = \frac{1}{a} v_0 \cos\theta$$

$$\therefore x = \frac{1}{a} v_0 \cos\theta \left(1 - e^{-at}\right)$$

y座標についても同じ

$$y = \int \dot{y}\, dt$$

$$= \int \left[\left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{a} \right) e^{-at} - \frac{g}{a} \right] dt$$

$$= -\frac{1}{a}\left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{a} \right) e^{-at} - \frac{g}{a} t + C'$$

初期条件より、$\left(t = 0, \ (x, y) = (0, 0) \right)$

$$C' = +\frac{1}{a}\left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{a} \right)$$

$$\therefore \ y = \frac{1}{a}\left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{a} \right)\left(1 - e^{-at} \right) - \frac{g}{a} t$$

問4.

$y=0$ になる.

$$x = \frac{1}{a} v_0 \cos\theta \left(1 - e^{-at}\right) \quad \longleftarrow \quad \text{今求めたもの}$$

（
厳密にとこうとすると $y=0$ になる時間を計算して
t を x にいれると計算できる。しかし大変。
今訊いてることは座標ではなく"限界値"。
時間が十分長くかかった~~場合に~~でも到達距離に
限界が出てくることを示す。
）

$t \to \infty$ にもっていくとどうなるか。

$$x = \frac{1}{a} v_0 \cos\theta \left(1 - \underbrace{e^{-at}}_{t\to\infty \ \to\ 0}\right) \leq \frac{1}{a} v_0 \cos\theta$$

$$x_{max} = \frac{1}{a} v_0 \cos\theta$$

答えを考察.

分母があったら、分母のものを0には出来ないことが分かる
aが0なら、摩擦がない問題に一致させる
$(\alpha \to 0)$

［質問］ 特に問2
微分方程式に慣れていない

今回のは変数分離型

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$$ ← 分離している

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$\int \frac{1}{g(y)}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot dx = \int f(x)\,dx$$

$$\int \frac{1}{g(y)}\cdot dy = \int f(x)\,dx$$

よく、積分として書かずにこう書いても等価

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)\,dx$$ ← 微分形

例を考えてみよう（例1）

$$\frac{dy}{dx} = -xy \qquad \left(dy = -xy\,dx \right)$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int(-x)\,dx \qquad \left(\frac{1}{y}dy = -x\,dx \right)$$

$$\therefore \log y = -\frac{1}{2}x^2 + C \qquad A$$

$$\therefore y = e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot e^{C} = Ae^{-\frac{1}{2}x^2}$$

（例2）

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$y\,dy = x\,dx$$

$$\int y\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y = \pm\left(x^2 + 2C\right)^{\frac{1}{2}}$$

（演習1.3　問2　について）

$$\begin{cases} \ddot{x} = -a\dot{x} & \left(\dfrac{dv_x}{dt} = -av_x\right) \text{ —— ①} \\ \ddot{y} = -g-a\dot{y} & \left(\dfrac{dv_y}{dt} = -g-av_y\right) \text{ —— ②} \end{cases}$$

①は、

$$\int \frac{1}{v_x}\,dv_x = \int (-a)\,dt \longrightarrow v_0 = v_0\cos\theta \cdot e^{-at}$$

（②は ①の結果がわかったので定数を変えて…
すっきりしない人は変数分離型を思い出してください。
だから②も全く同じようにとける）

②は、

$$\int \frac{1}{av_y + g} dv_y = -\int dt$$

$$\therefore \frac{1}{a} \log (av_y + g) = -t + C'$$

$$\therefore \log (av_y + g) = -at + aC'$$

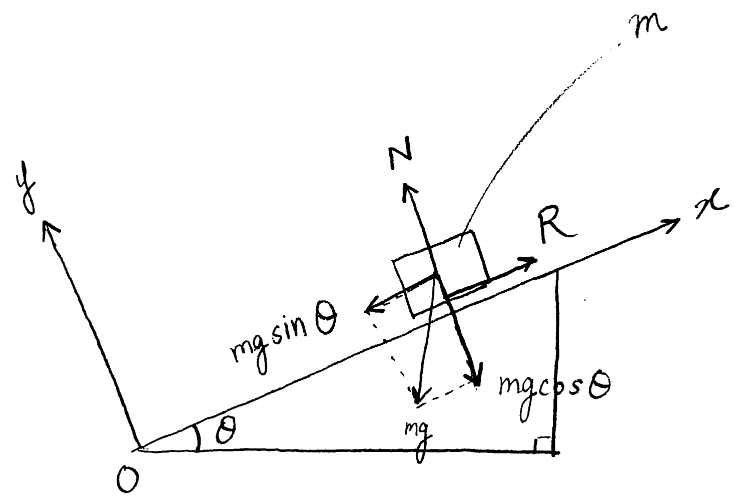
$$av_y + g = A' \cdot e^{-at}$$

$$v_y = \frac{A'}{a} e^{-at} - \frac{g}{a}$$

$t=0$, $v_y = v_0 \sin\theta$ より、

$$v_y = \frac{1}{a}\left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{a} \right) e^{-at} - \frac{g}{a}$$

(3) 斜面上の運動



運動方程式

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -mg\sin\theta + R \\ 0 = N - mg\cos\theta \end{cases}$$

Rについて

静止摩擦力

$R \leqq \mu N$　　μ：静止摩擦係数

最大静止摩擦力

$R_{max} = \mu N$

動摩擦力

$R = \mu' N$　　μ'：動摩擦係数