問題1.2
問6

$(1+\tan^2\theta)$

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} + x\tan\theta$$

点(x_0, y_0)を通るためには

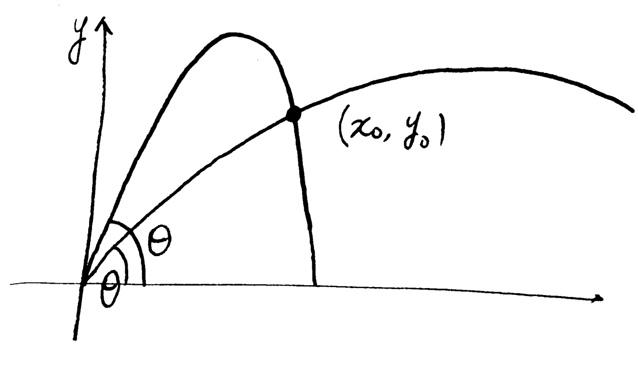
$$y_0 = -\frac{gx_0^2}{v_0^2}(1+\tan^2\theta) + x_0\tan\theta$$

$\tan\theta$の2次方程式になる

$$\Longrightarrow \boxed{\tan\theta = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - 2gy_0v_0^2 - g^2x_0^2}}{gx_0}} \quad \text{———} (*)$$

明らかにθが2つ出る。

⟶ ある点(x_0, y_0)を通る軌道は2つある。



ルートの中が正になってないと解が存在しないので、

かつ $v_0^4 - 2gy_0v_0^2 - g^2x_0^2 \ge 0$ ——— v_0^2の2次方程式

という条件も必要になる

$r_0 \equiv \sqrt{x_0^2+y_0^2}$ と定義してやると、

$v_0^2 \geq (y_0+r_0)g$ を満たさないと解が存在しない。

よって、点(x_0, y_0)に命中させる限界の速さは

$v_{0,crit} = \sqrt{(y_0+r_0)g}$

critical

また、このときに2つの解は一致する

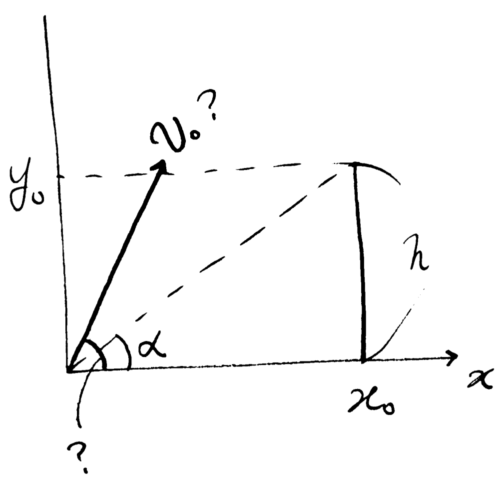
そのときの投射角

ルートの中が0になっているから、

(※)から、 $\tan\theta = \dfrac{v_0^2}{gx_0}$

ここまでが一般的な扱い？

実際に問6. を考えてみると、



$$v_{0,\,crit} = \sqrt{(y_0 + r_0)g}$$ ですが、

与えられている。

$y_0 \longrightarrow h$

$r_0 \longrightarrow r_0 \sin\alpha = h$ より、

$r_0 = \dfrac{h}{\sin\alpha}$

$$= \sqrt{\left(h + \frac{h}{\sin\alpha}\right)g}$$

$$\boxed{= \sqrt{gh(1 + \operatorname{cosec}\alpha)}}$$

そのままでもいいが
cosec で書き直せる。

$$\tan\theta = \frac{v_0^2}{g x_0}$$ より、

$x_0 = \dfrac{h}{\tan\alpha}$

$$= \frac{gh(1 + \operatorname{cosec}\alpha)}{g\left(\dfrac{h}{\tan\alpha}\right)}$$

$$= \boxed{\frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

ベクトルとして
空気抵抗を考える

抵抗係数(>0)

$$\mathbb{R} = -\alpha \boldsymbol{v}$$

$$= (-\alpha \dot{x},\ -\alpha \dot{y})$$

運動方程式は、

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\alpha \dot{x} \\ m\ddot{y} = -mg - \alpha \dot{y} \end{cases}$$

こういう運動方程式に
変わる.

x方向の加速度は

$\left(a \equiv \dfrac{\alpha}{m} \text{ とおいてやると、} \right)$

$$\ddot{x} = -a\dot{x}$$

$$\ddot{y} = -g - a\dot{y}$$

x方向は、

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -\alpha \dot{x}$$

意味としては

$$\frac{dv_x}{dt} = -a v_x$$

数学の積分と同じ
積分の形にしてやる.

v_xを左に、dtを右に。

$$\int \frac{1}{v_x}\, dv_x = \int (-a)\, dt$$

$$\therefore \log v_x = -at + C$$

積分定数は全体で1こ出せばよい

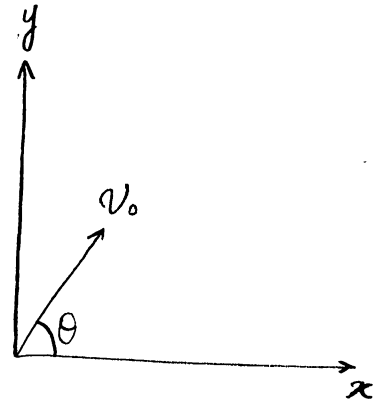
$$\therefore v_x = e^{-at+C}$$

$$= e^{C} \cdot e^{-at}$$

$$= A \cdot e^{-at}$$

$A \equiv e^{C}$ とおく.

定数を決めるのが初期条件でした。
どう考えるかというと.



$t=0$ で $v_x(0) = v_0 \cos\theta$

代入して、

$\Downarrow$

$$\boxed{v_x(0) = A}$$

$$\therefore v_x = \dot{x}$$

$$= \underbrace{v_0 \cos\theta}_{A} \cdot e^{-at}$$

y方向についても求めてやる。

$-mg$ がなければ x と全く同じですよね。
(初期条件がちがうだけで)

大体同じ形になる?
正確に計算するために、

$$\dot{y} = Be^{-at} + D$$ として代入すると、

微分したのか

$$-a\cancel{B}e^{-at} = -g - \overset{a}{\cancel{\alpha}}(\cancel{B}e^{-at} + D)$$

$$\therefore D = -\frac{g}{a}$$

初期条件より、

$t=0$ で $v_y(0) = v_0 \sin\theta$ より、

$$B + D = v_0 \sin\theta$$

$$\therefore B = v_0 \sin\theta + \frac{g}{a}$$

よって、

$$v_y = \dot{y} = \left(v_0 \sin\theta + \frac{g}{a}\right)e^{-at} - \frac{g}{a}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} \\ m\ddot{y} = -mg - \alpha\dot{y} \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\alpha}{m}\dot{x} \\ \ddot{y} = -g - \frac{\alpha}{m}\dot{y} \end{cases}$$

$$\frac{dv_x}{dt}$$