2013.04.24(水) 線形代数I

18:30 2A212 T-ACT ボランティア THKの人が主体になっているのか。

オイラーの公式

円周率 = 単位円の演習の半分

n項数ベクトル

自然数というと2通り出てくるからその場その場で適当に判断してね。
1以上が本当の自然数だけど、面倒だから0以上を自然数とする場合もある。

連立方程式

$3x + 5y + 4z = 1$
$2x + y + z = 4$
$x + \quad + z = -3$

縦に見ると3つの数字が並んでいるよね。

定数とx,zの係数が3つなのに、yの係数が2つだと、数学としては区別するのが面倒くさいということで、0を導入する。

出席回数と出席点、試験点のベクトル

平面ベクトルや空間ベクトルと同じように、データの羅列も同じように処理できてしまうということを理論化しましょうということになる。

定義

[まず何を並べるかが大事になる。何を並べるかを決める]
並べるもの(スカラーと呼ぶ)

[実数を並べたり、有理数を並べたり、複素数を並べたり、色々並べたりするので、君たちはこれらのうちのどれか一つを選んだということで始めて下さい。話が全部違います。線形代数の良さは、何を選んでもほぼ差はありませんということ。]

選んだもの全体をKで表す。

[慣れてるから実数を選んでも差はありません。]

[一番慣れてない複素数を選んで考えた方があたまの訓練になるよ]

nこ並べる

[座標と区別するために縦に並べます]

[a_iは君たちが考えたスカラーの中から取ってきています]

①

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \; a_i \in K \right\}$$

右側の条件を満足する

例:

$$\mathbb{C}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \middle| \; \begin{matrix} a_i \in \mathbb{C} \\ (i = 1, 2, 3) \end{matrix} \right\}$$

i = 1,2,3は通常略しちゃいます。

和を定義する

$$K^n \ni \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

和を $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$

で定義する。

スカラー倍を定義する

$$\lambda \in K$$

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

スカラーは、実数で考えてるなら実数を持ってこないといけないし、複素数で考えてるなら複素数を持ってこないといけない。

言い忘れてた、これ(どれ？Kのこと？)は集合です。

重複を確認しないといけない。(Kの中でまったく同じベクトルは重複だとして排除するということ？じゃあ同じベクトルの定義とは？という話の流れなのかな)

対応しているスカラーが一致すること(1か所でも異なれば違うベクトル)

じゃあ連立方程式をベクトルで書こうと思ったら？

3xは3をx倍したもの、2xは2をx倍したもの、xは1をx倍した者と思えば、

$$x\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix}3x\\2x\\1x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5y\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4z\\z\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+5y+4z\\2x+y+z\\1x+0+z\end{pmatrix}$$

次に、これは足し算をやっているんだから、足し算をやりましょう。
そしてそれが、定数と同じっていうのをやる。

ベクトルが等しいと言うのは、対応しているスカラーが死全て一致することだから、連立方程式とまったく同じ式が出てくる。

連立方程式とベクトルの1つの方程式がまったく同じ。
3つの式が1つになる。
今の段階では表し方が簡単になっただけで簡単に…

今この式を見てて格好悪い？

x,y,zが左にある。

右からのスカラー倍は定義されてないから、何か別の意味に誤解されることはないので、右にx,y,zを書いてしまえば良い。右からかけても左からかけたんだよとルールを決める。

定義されていないという言葉を覚えよう

3項数ベクトルと2項数ベクトルを足すことは定義されていない

実数を複素数ベクトルに掛けようとすると、実数を複素数だと思ってかけるとか、2項数ベクトルを3項数ベクトルだと思って足すとか、この定義をしなくちゃいけなくなる。

今、ベクトルとベクトルのかけ算を定義されていない。

1項数ベクトルはスカラーだと思い直せばかけ算ができるとか…
複素数は2項数ベクトルだと思ってそのかけ算を定義しているとか

３こうすうべくとるにかんしてかけざんがあると思う？
一般的にはない。
でも3項数は空間なので、かけ算が定義されている。
外積と呼ばれるやつ。
2つの3項数ベクトルが張る平面と垂直になっているベクトルで、その長さが2つの3項数ベクトルの面積であるベクトルになる。
可換じゃなくなるけど
4次元にも、実数ベクトルで面白い積が定義されている。
そのあとは8次元、16次元と2の累乗のやつが積を定義しやすいらしいが…

内積
全ての数ベクトルに定義されていて、
各成分をかけたものを足す。

p.14
みなさんが数に対して持っている常識。但し定義されているものだけだと守ってもらうと、
3つのベクトルの足し算は？
2つのベクトルの足し算は定義したけど、3つのベクトルの足し算は定義していない。
しかし、そのうちの2個をくっつければいい。
しかし、くっつける順番を考えないといけない。
何故外側2つをくっつけないかというと、外側2つは形上くっついてないからね(A4の可換率も定義しないといけなくなるということか)。
これを証明すればいい。実数でも複素数でも整数でも成り立つように[どうやって証明するの？]。
じゃあ4つのベクトルの足し算は？
数学的帰納法を使えばいい
3個のベクトルの場合正しい。
一般のnに関してトライしてみて。

次は行列。