2013.04.19(金4) 線形代数I(数学1年) 2週目1回

1.3までのやつを来週までに出す？

写像ϕ: A → B

集合っていった瞬間に数学的な集まりです。

集合としてAとBが等しいとき、写像を変換と呼ぶ。

変換と呼んだら、AとBは同じものだと思って下さい。

だから、おとといいってたようなやつ、平面ベクトル全体の集合を考えていて、

R(平面ベクトル全体の集合)∋A fix

$$\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} \\ A \ \text{fix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \varphi_A : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & B & \longmapsto & A+B \end{array}$$

(変換)

$\mathbb{C}$ 複素数

$$\begin{array}{l} \mathbb{C} \\ \rotatebox{90}{$\in$} \\ z \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} z_\times : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & zx \end{array}$$

(変換)

演算って、数字を二つ持ってきたら新しい数字が決まるという考え方。これが写像においても起きているということ。

$$A \xrightarrow{\theta} B \xrightarrow{\varphi} C$$

集合

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\theta} & B & \xrightarrow{\varphi} & C \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ a & \longrightarrow & \theta(a) & \longrightarrow & \varphi(\theta(a)) \end{array}$$

$\varphi\theta : A \to C$ で表す.

AからBへ(同じ記号なんだけど)の写像が一つ与えられましたと。
A,B,Cは全部集合ね。

そうするとここで何が起きるかというと、Aからなんでもいいから一つaというものを持ってきます。θは写像なんだから何か一つ行き先があるわけです。θを取ってくるとBの元をひとつきめます。Bの元を一つ決めると、ϕは写像なんだから、Cの元をひとつ決めます。で、個の途中を忘れましょうと。忘れてしまうと何を言っているかというと、Aの元が決まるとCの元が決まる。それは写像なのね。

2

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \overset{(z\times)}{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longrightarrow & z\cdot x = \varphi(x) \end{array}$$

次の性質をみたす。

① $z(x+y) = zx + zy$

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

② $z\cdot ax = azx$

$$\varphi(ax) = a\varphi(x)$$

行き先の集合が元と同じ

一次変換 $\in$ 線形写像

(線形)

複素共役

複素共役

$$\begin{array}{ccccc} \overline{(\ )}: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\ & a+bi & \longmapsto & a-bi & = \overline{a+bi} \\ & & & & \| \\ & & & & \varphi(a+bi) \end{array}$$

[証明]

証明 ①

$\mathbb{C} \ni \alpha, \beta.$ $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$ こうなりますか？

$^{\exists} a, b \in \mathbb{R}$ s.t. $a+bi = \alpha$

$^{\exists} c, d \in \mathbb{R}$ s.t. $c+di = \beta$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= (a+bi) + (c+di) \\ &= (a+c) + (b+d)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha+\beta) &= (a+c) - (b+d)i \\ &= (a-bi) + (c-di) \\ &= \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) \end{aligned}$$

足し算はなりたつ

証明2

$\mathbb{C} \ni \alpha, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$^{\exists} a, b \in \mathbb{R}$ s.t. $\alpha = a + bi$

$$\lambda\alpha = \lambda a + \lambda bi$$

$$\varphi(\lambda\alpha) = \lambda a - \lambda bi$$
$$= \lambda(a - bi)$$
$$= \lambda\varphi(\alpha)$$

ところ内？

$$i\alpha = i(a+bi) = -b + ai$$

$$\varphi(i\alpha) = -b - ai$$

$$\varphi(\alpha) = a - bi$$

$$i\varphi(\alpha) = b + ai$$

$$\overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(a+bi)}\,\overline{(c+di)}$$

写像で書くと ~~$\varphi(AB)$~~

$$\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)$$

複素共役の性質

$\phi(\alpha\beta) = \phi(\alpha)\phi(\beta)$

[かんたんにできるから証明]

$\alpha\phi(\alpha) = |\alpha|^2$

写像と複素共役のことやったから、抽象論がだいぶ進んだので、ここで閉めましょう。

全射と全射を合成すると全射になる

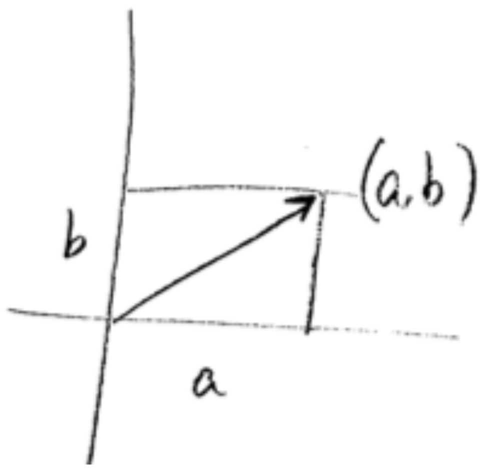
証明

行き先の任意の元をとると、もとのやつが必ずする的な証明。

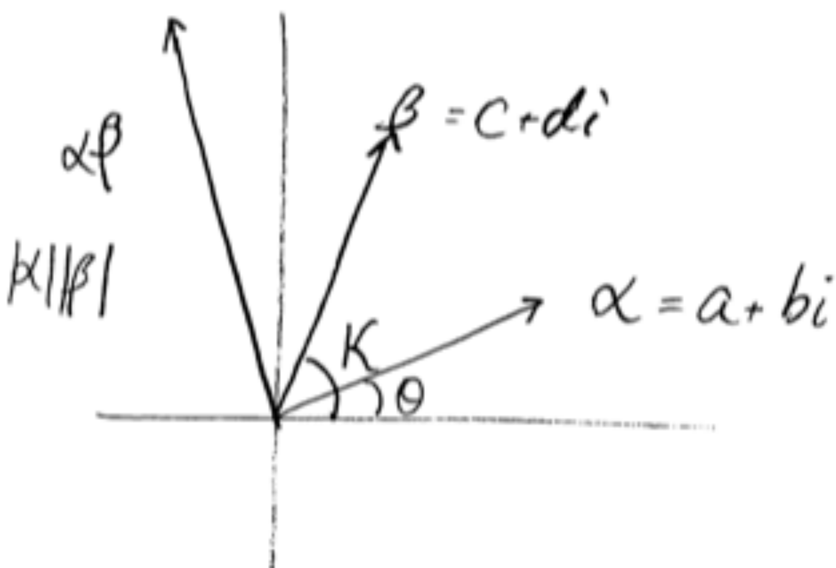
平面ベクトル

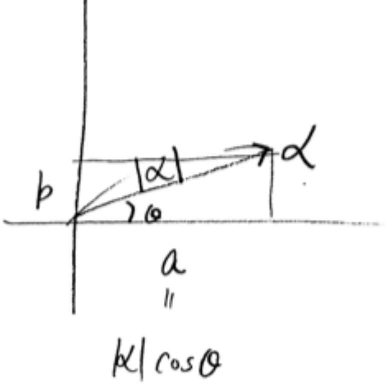
平面ベクトル

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \xleftrightarrow{1:1}$$



$$1 \geqq \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{|\vec{v}||\vec{u}|} = \cos\theta \geqq -1$$





$$\alpha = |\alpha|(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$\beta = |\beta|(\cos K + i\sin K)$$
$$\alpha\beta = |\alpha||\beta|\Big(\cos\theta\cos K - \sin\theta\sin K + i(\sin\theta\cos K + \cos\theta\sin K)\Big)$$
$$= |\alpha||\beta|\Big(\cos(\theta+K) + i\sin(\theta+K)\Big)$$

空間ベクトル

空間ベクトルの内積を定義する。

任意の空間ベクトルvに対して、自分と自分の内積<v,v> は必ず0より大きい。(>= 0)

角度を定義