2013.04.17(水3) 線形代数I(数学1年)

複素数
実数や有理数よりも重要であることを理解して下さい。

例は実数とかで挙げることが多いけど、本質的に線形代数がよく使われるのは複素数の時です。

実数とか複素数とかいう言い方をしないでスカラーという言い方をします。いちいち区別するのが面倒なのでスカラーという言い方をします。いまスカラー倍っていうと実数しか考えてないと思うけど、そのうちi倍も考える。そう考えても何も問題なく実数を考えているかのように扱えるのが線形代数の良いところ。

複素平面はガウス平面と呼ばれます。

複素数はガウスが作るより前から出てきていたんだけど、そういう数が合ったらいいなというだけだったとか。解があるかないかをいちいちわけなくちゃ行けないのは不便だよね。ガウスは何をしたかっていうと…自然数は誰でも考えつくわけね。x+1=0の解を考えるにはマイナスを考えなくちゃ行けない。引き算をするために整数という概念が導入される。2x+1=0を考えようと思ったら有理数を考えないと行けない。x^2 -2 = 0 を考えるには無理数を考えないと行けない。やるたびに広がるんだけど、それは学問としていいのか。

ガウスは複素数以上のことを考える必要はないということを証明した。複素数係数の方程式の解は複素数の中にあるということを証明した。

複素数を考えなかったら数学ができないといっていい。これがなければ今の数学はやってられないし、…

マイナスという概念さえきちんと認められたのは17世紀になってからです。

複素数を点で表したのは、ガウスが最初じゃない。数学は、表示すること自体は誰でもできること。複素数の本当の価値、平面で方程式を解くことで、複素数係数を持つ方程式の解は複素数の中にあることを証明した。

点と考えると正しくなくて、ベクトルと複素数が一対一で対応している。一対一の対応っていうのね。複素数が別だったらベクトルが別、ベクトルが別だったら複素数が一つ。1:1対応。

平面ベクトルには足し算があります。複素数の方にも足し算があるんだけど、この関係も同じもの。

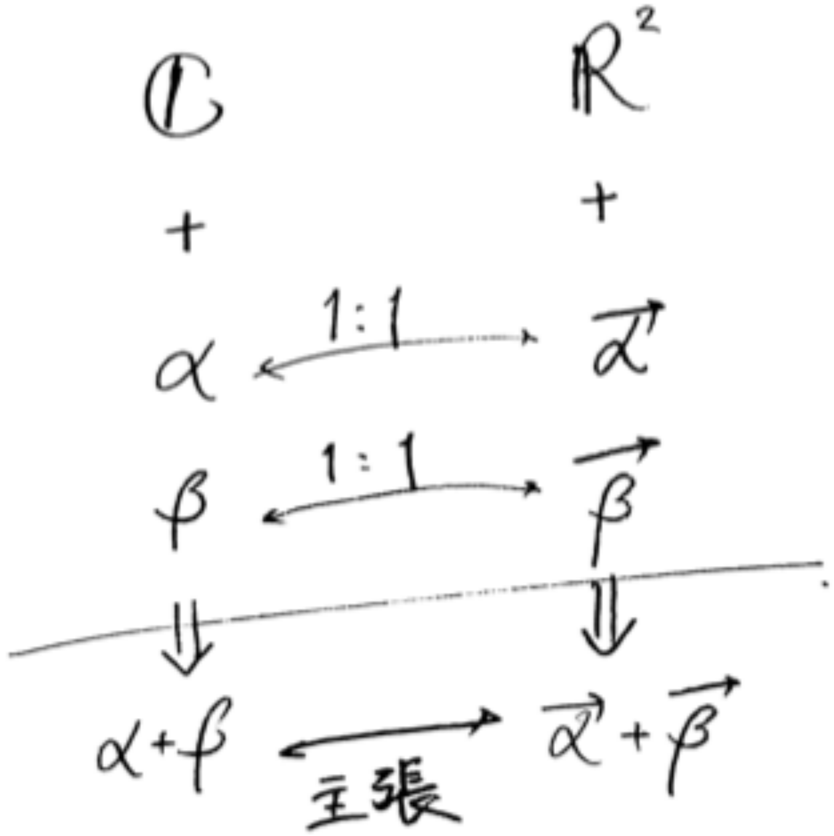
複素数全体を書くと、いちいち全体というのは面倒なので、複素数体ということを後々考えます。
平面ベクトル空間

言葉を覚えて下さいね。数学は新しい言語なので。

複素数の中にも足し算があります。平面ベクトルの中にも足し算があります。複素数にαというのを持ってきたらαに対応するベクトルがある。βを持ってきたらβに対応するベクトルがある。ここまでは仮定ね。

複素数で足し算を定義すると、ベクトルの方でも足し算が定義される。これは仮定から自動的に定義される。

主張は何かっていうと、その複素数とベクトルが対応していますということ。



複素数にはかけ算というのもあります。積。
てきとうに2つの複素数を持ってくる(any)。それに対応するベクトルを仮定する。

$\mathbb{C}$の中の積

Any $a+b\sqrt{-1}$
$c+d\sqrt{-1}$

$$(ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1}$$

$\mathbb{R}^2$

$$\alpha=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\beta=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$$

$$\alpha\times\beta=\begin{pmatrix}ac-bd\\ad+bc\end{pmatrix}$$

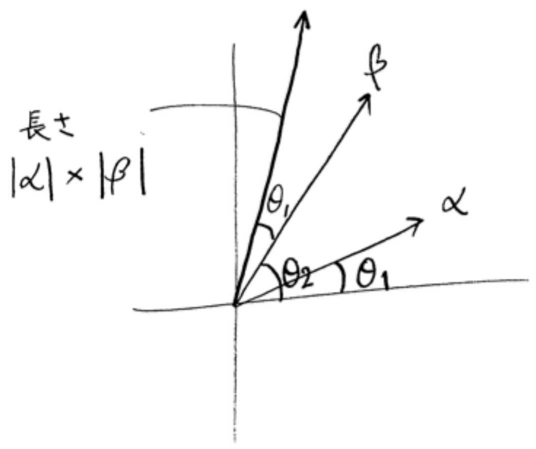
x^5 -1 = 0 の解を求めること ⇔ 正5角形を求める

線形代数の場合、複素数は回答が複素数の中で見つかるというくらいでしか出てこないので、しばらく複素数出てきません。平面ベクトルも役に立つなということをここでは理解してもらえれば。

ここまでの部分ちゃんと読んでくださいね。次金曜日にします。
わかんなかったら置きっ放しにしないで聞きに来てね。

今の線形代数の基礎となる集合と写像というものから。
これが数学の基本です。数学の歴史は3000年前から、ピラミッドを作るときから実数のことが調べられていて、整数のいろんなことも2500年くらい前からされています。

正しいか正しくないか人間は判断できないから正しいと仮定する？
対応と呼ばれるものが写像の原点？



加法定理で証明できる
自分で確認

集合と写像

集合と写像

$$
\text{関数}\ \varphi:\quad
\begin{array}{ccc}
\text{集合} & & \text{集合} \\
A & & B \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
a & \xrightarrow{\text{対応}} & \cancel{b}\ \varphi(a) \\
b & \longrightarrow & \varphi(b)
\end{array}
$$

Aのすべての要素に対して
ただ1つ 行き先 $\varphi(a)$ がある。
このような関係を写像と呼ぶ
$\varphi : A \to B$ で表す。

[13:09]複素数の方が違ってたら平面の方も違います。そして行き先は平面の中にあります。ということ

これからどんなことをするか

複素数であろうと平面であろうと構わないから、R^2があって、そこからなんでもいいからαをとってきて、fixします。固定します。そのときに写像…

AとBで同じ集合R^2を持ってきます。Aからなんでもいいからβを取り出してきて、行き祭をβにαを足したものにする。平面ベクトルと平面ベクトルを足したものは平面ベクトルです。

何やっているか分かる？いわゆる平行移動と呼ばれるやつ。

$$\mathbb{R}^2 \ni \vec{\alpha} \quad \text{fix}$$

$$\begin{array}{ccc}
A = \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & B = \mathbb{R}^2 \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
\beta & \longmapsto & \beta + \vec{\alpha}
\end{array}$$

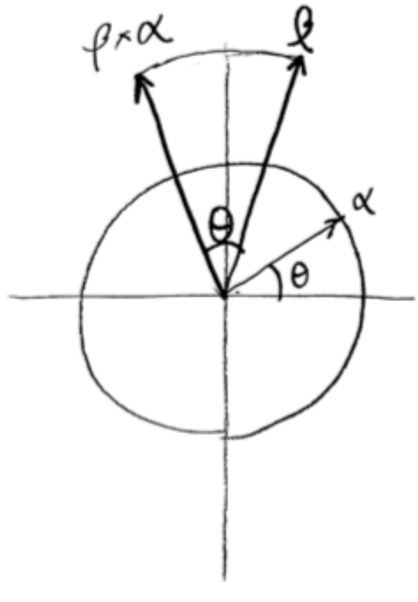
平行移動といっても、全ての点が動いている。図形で考えていたものが全て代数になっている。微分を求めるときも、微分をやってないよね。傾きを求めたりせずにぽーんとsinならcosに置き換えるよね。これは写像をやっているの。

αとして複素数を持ってきます。但し長さは1にしておきます。これを固定しておきます。

次に複素数の中になんでもいいからβというものを持ってくると$\beta\times\alpha$という複素数が決まります。

$$\alpha \in \mathbb{C} \qquad |\alpha| = 1 \qquad \text{fix}$$

$$\begin{array}{cccc}
\times\alpha : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
 & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\
 & \beta & \longmapsto & \beta\times\alpha
\end{array}$$



βをθだけ回転させたということになる。平面で考えると回転は複素数を掛けたということで説明がつく。これも写像の一つ。

用語

ここでやったのは1:1なのね。それは性質の良い写像なのでそれを取り出さないと行けない。単射って呼ばれるやつと全射って呼ばれるやつ。

単射は元が違っていたら行った先も違う。

単射じゃない写像は、元が違っていても行き先が同じだったりするのね。

全射は行き先にあまりがない。全体に行きます。

1:1の場合は、全射かつ単射。全単射。