平面ベクトル

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ の線形結合で表す。

1次独立
一次従属
基底

来週の水・金くらいまでに、
1.1,2,3節をレポートに

問1.1

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$$

問. $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ を $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}\right\}$ の線形結合で表せ.

答. $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$

$-)\ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\ \ 2\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\ \ 1\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$

ゼロベクトル $\boxed{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}} = -\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ ← 係数0以外の表示

$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ を $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ の線形結合

$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ のみ.

$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ と書けたとすると、

$+\ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = (\lambda_1 - 1)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + (\lambda_2 - 2)\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + (\lambda_3 - 1)\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$$

線形結合で表示した方法が一意的でない

$\Longleftrightarrow$ 0ベクトルを

〃

ベクトルの集まり $\{v^1, \dots, v^k\}$ が一次独立

$\Longleftrightarrow$ 0ベクトルの表示が一意的。

もし、$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 v^1 + \dots + \lambda_k v^k$

とできていれば、

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$$

一次従属 $\Longleftrightarrow$ 一次独立でないもの

$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ は一次独立？

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda = 0$

$\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ は一次従属

基底　　$\mathbb{R}^2$ のすべてのベクトルを
線形結合で表すことができる
一次独立なベクトルの集まり

ϕ は一次独立

0を表示できない
(仮定が満たされない)

↓

(正しいとする)

←

一次独立の部分
集合をとり出したら
一次独立の集合
になっていること
が保証される。

ベクトルの集合Ωが一次独立とする.
$\Longrightarrow$ $W \subseteq \Omega$ も一次独立.

$$\Omega = \{v^1, \dots, v^k\}$$ が一次独立とする

$$\cup$$

$$\{v^1, \dots, v^s\}$$

このとき $\{v^1, \dots, v^s\}$ も一次独立である。

証明

$0 = \lambda_1 v^1 + \cdots + \lambda_s v^s$ とする。

$0 = \lambda_1 v^1 + \cdots + \lambda_s v^s + 0 \cdot v^{s+1} + \cdots + 0 \cdot v^k$.
仮定より、$\{v^1, \dots, v^k\}$ は一次独立。
なので、
$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = 0 = \cdots = 0 = 0$

$\therefore$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_s = 0$ となる。
$\therefore$ $\{v^1, \dots, v^s\}$ は一次独立。

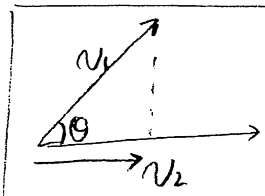
内積

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ の内積を $ac + bd \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ のベクトルの長さ $= \sqrt{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} と \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} の内積}$

角度 θ も　$\cos\theta = \dfrac{v^1, v^2 \text{の内積}}{v^1\text{の長さ} \times v^2\text{の長さ}}$



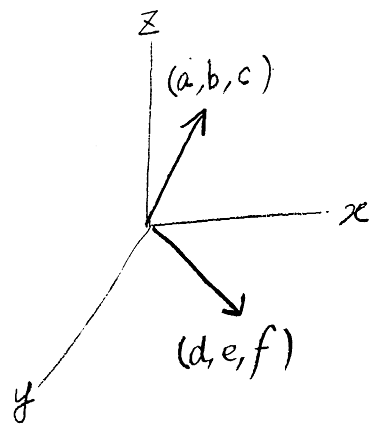
$|v^1| \cos\theta \, |v^2|$

内積を先に出してしまえば、それでベクトルの長さが決まる。
長さという概念を後にしてしまいましょう。

$\downarrow$

考えることが2つから1つになる。

空間ベクトル



$\text{内積}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \right) = ad + be + cf$

$\cos\theta = \dfrac{ad + be + cf}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{d^2+e^2+f^2}}$

と実際の世界で一致するかどうか確認する

定義より、$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) = a^2 + b^2$

$a, b \in \mathbb{R} \implies a^2 + b^2 \geq 0$

$\left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \right) = i^2 < 0$

この事実と線形性
$$\begin{cases} (v^1 + v^2, v^3) = (v^1, v^3) + (v^2, v^3) \\ (\lambda v^1, v^3) = \lambda (v^1, v^3) \\ (v^1, v^2) = (v^2, v^1) \end{cases}$$

@ 平面ベクトル $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$$\sqrt{(\vec{v}+\vec{u}, \vec{v}+\vec{u})} \underset{\text{三角不等式}}{\leq} \sqrt{(\vec{v}, \vec{v})} + \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})}$$

証明

$$\sqrt{\left(\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}\right)} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$$

成分を使わなくても
線形性をフルに使えば解ける.